Математичко списание НУМЕРУС
за учениците од основното образование.

ISSN 1409-875X

Излегува во четири броја во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 90 денари, а претплатата за 4 броја е 300 денари.

Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса:
Сојуз на математичари на Македонија,
ул.„Архимедова“ бр. 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија.
е-адреса за претплата: sojuz.na.matematicari@gmail.com
Жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СММ (со назнака за НУМЕРУС).

Електронска адреса за контакт, праќање прилози и решенија: numerus.smm@gmail.com

УРЕДУВАЧКИ ОДБОР

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИТЕ НА МАКЕДОНИЈА

ГОСТИН НА НУМЕРУС

Никица Давкова
Славица Колева
Лидија Јовановска

ООУ „ДИМИТАР ВЛАХОВ“, ШТИП

ООУ „Димитар Влахов“, Штип е лоцирано во средишниот дел на населбата Сењак 4 во Штип, во источниот дел на нашата држава, оддалечен 98 km од главниот град Скопје. Училиштето е изградено во 1982 година, наменски градено за изведување на воспитно-наставна дејност. Училиштето се одликува со современи архитектонски решенија и со можност да ги задоволува потребите и современите барања.

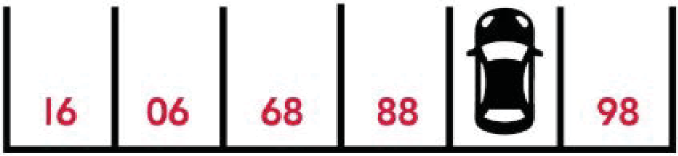
Од почетокот училиштето работи во склоп на Центарот за основно образование и воспитание „Јосип Броз – Тито“ како работна единица, од 1991 година продолжува со својата работа како самостојно училиште. Во учебната 2019/2020 година во училиштето се школуваат 987 ученици, во 38 паралелки, а меѓу вработените се 60 наставници, 5 стручни соработници, 13 припадници на технички персонал, 1 директор и 1 помошник директор.

Училишниот двор има површина од речиси 4000 m^2, има спортски игралишта и полигон за настава по сообраќај. Дворот е уреден, озеленет, пошумен со зимзелени и листопадни дрва кои секоја година добиваат сè поубав облик. Тој претставува одлично место за одмор на учениците и вработените, но и за локалните жители.

Учениците од ООУ „Димитар Влахов“ од Штип, се редовни читатели на списанието „Нумерус“ кое им помага да навлезат подлабоко во тајните на математиката, ги охрабрува да учествуваат во натпревари и да освојуваат значајни резултати.

Ученици од ООУ „Димитар Влахов“ од Штип решаваа задачи за „Нумерус“

1. Кој број треба да стои на местото на количката?

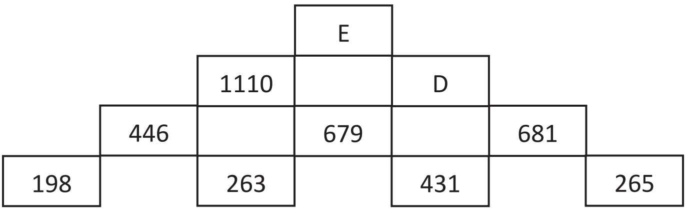


2. Откриј го непознатиот број!

8809 = 6	7111 = 0	2172 = 0	6666 = 4
1111 = 0	3213 = 0	7662 = 2	9313 = 1
0000 = 4	2222 = 0	3333 = 0	3555 = 0
8913 = 3	8096 = 5	7777 = 0	9999 = 4
7756 = 1	6855 = 3	9881 = 5	5531 = 0

2581 = ?

3. Кои броеви се кријат зад буквите E и D?



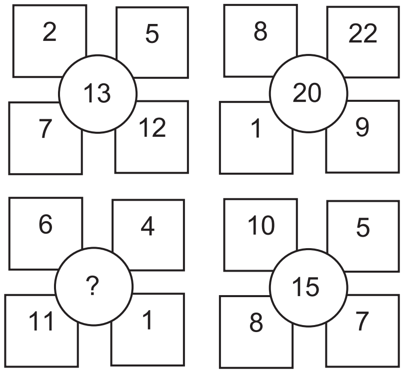
4. Додадете една црта за равенството да биде точно!
Напомена: Не можете да го прецртате знакот за еднаквост.

5 + 5 + 5 + 5 = 555

5. Пет деца во семејството Ивановски имаат помеѓу 14 и 18 години. Нема две деца со еднаков број години. Кое од нив е најстаро, ако е познато следново:

- Маја е три години помлада од Иван.
- Марко е постар од Дино.
- Маја е помлада од Лана.
- Дино не е најмлад.
- Иван не е најстар.
- Лана е две години постара од Марко.

6. Кој е непознатиот број: 23, 11 или 12? Зошто?



Решенија на задачите од учениците од ООУ „Димитар Влахов“ од Штип

1. За да го откриеме бараниот број ќе ја погледнеме сликата наопаку. Бараниот број е 87.

2. Тоа е бројот 2, затоа што за секој запишан четирицифрен број се бара колку пати е нацртано кругче при запишување на неговите цифри.

3. Секои два соседни броја во ист ред се собираат, па од збирот се одзема 15 и така се добива бројот кој е над нив во средина. На пример, 198 + 263 = 461, 461 – 15 = 446. Затоа, D = (679 + 681) – 15 = 1345 и E = (1110 + 1345) – 15 = 2440.

4. На првиот знак + му допишуваме една црта и со тоа тој станува број 4. На тој начин добиваме точно равенство:

$$5\ 4\ 5 + 5 + 5 = 555$$

5. Иван има 17 години, Маја има 14 години, Марко има 16 години, Лана има 18 години, Дино има 15 години. Значи, најстара е Лана.

6. Прво ги собираме сите броеви во квадратчињата околу кругчето, па добиениот збир го делиме со 2. Па, бараниот број е бројот (6 + 4 + 11 + 1) : 2 = 11.

Ева Димитреска VI2 одд., Теа Беркова VI2 одд., Невена Колева V2 одд. и Анастасија Хаџи Смилева VI2 одд.

ДАЛИ ЗНАТЕ ЗА ...

Ирена Стојковска
Природно-математички факултет, Скопје

ТАЈНАТА НА БРОЈОТ 6174

Одберете еден четирицифрен број кој нема четири исти цифри. На пример, да го земеме бројот на тековната година 2020. Од четирите цифри на бројот ги составуваме најголемиот и најмалиот можен број (не се бара најмалиот број да е четирицифрен, што значи ако имаме број кој содржи две цифри 0, најмалиот број составен од неговите цифри ќе биде двоцифрен број, а нулите ги запишуваме на местото од илјади и стотки). Ги добивме броевите 2200 и 0022. Ги одземаме добиените броеви, и на новодобиениот број ја повторуваме постапката сè додека не дојдеме до бројот 6174. Ова се пресметките кои ги добивме:

2200 – 0022 = 2178
8721 – 1278 = 7443
7443 – 3447 = 3996
9963 – 3699 = 6264
6642 – 2466 = 4176
7641 – 1467 = 6174

Кога еднаш ќе дојдеме до бројот 6174 и ако продолжиме да ја повторуваме постапката, постојано разликата ќе биде бројот 6174. Сега, почнете од друг четирицифрен број, на кој не му се сите четири цифри еднакви. Повторувајте ја постапката. Кој број го добивте? Повторно ќе го добиете бројот 6174, независно од кој четирицифрен број сте почнале. Да видиме зошто е тоа така?

Ако цифрите на еден четирицифрен број ги запишеме во опаднувачки редослед ќе го добиеме најголемиот број, а ако ги запишеме во растечки редослед ќе го добиеме најмалиот број. Нека најголемиот број е $abcd$, а најмалиот број е $dcba$, и при тоа $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ и не сите цифри се еднакви. За поедноставен запис на бревите го изоставуваме записот за позициона форма на број. Ја запишуваме разликата на овие два броја на следниот начин:

$$\begin{array}{r} abcd \\ -dcba \\ \hline ABCD \end{array}$$

Да го разгледаме случајот кога сите цифри a, b, c, d се различни, односно кога $a > b > c > d$. Ги добиваме следните равенства:

$$D = 10 + d + a \quad (\text{бидејќи}\, a > d)$$
$$C = 10 + c - 1 - b \quad (\text{бидејќи}\, b > c - 1)$$
$$B = b - 1 - c \quad (\text{бидејќи}\, b > c)$$
$$A = a - d$$

Го бараме бројот кој е еднаков на разликата меѓу најглемиот и најмалиот број составен од неговите цифри, значи цифрите A, B, C, D се некој распоред (пермутација) од цифрите a, b, c, d. Бројот на такви распореди е 4! = 24. Ако ги испробаме сите овие распореди ќе добиеме дека единствено за распоредот $ABCD = bdac$ постои решение на горните равенки. Тоа решение е $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 1$, односно бараниот број $ABCD$ е бројот 6174. Во случајот кога некои од цифрите a, b, c, d се еднакви, но не сите, горните равенки не даваат решение за ниеден распоред на такви цифри. Затоа, бројот 6174 е единствениот четирицифрен број со бараното својство.

Бројот 6174 е познат како **Капрекаров број** или **Капрекарова константа**, наречен во чест на индискиот математичар Капрекар кој го открил ова негово својство во 1949 год.

Задачи за самостојна работа

1. Испитај дали меѓу трицифрените броеви постои Капрекаров број, односно број кој е еднаков на разликата меѓу најголемиот и најмалиот број составен од неговите цифри. Колку такви броеви има?

2. Дали меѓу двоцифрените броеви постои Капрекаров број, број кој е еднаков на разликата меѓу најголемиот и најмалиот број составен од неговите цифри? Објасни зошто.

Извори:

[1] Y. Nishiyama, *The Wierdness of Number 6174*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 80 (3) (2012), 363-373.

Лидија Филиповска
професор во гимназија СУГС „Јосип Броз Тито“, Скопје

РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ (продолжение)

А) ЕЛЕМЕНТАРНИ РАВЕНКИ (равенки со една операција)

Секоја равенка од облик $a * x = b$, или $x * a = b$, каде а$, b$ се дадени реални броеви, x е непозната која сакаме да ја најдеме, а „ $*$ “ заменува една од четирите операции $+$, $-$, $\cdot$, :, ја нарекуваме *елементарна равенка*. Примерот во продолжение го илустрира решавањето елементарни равенки.

Пример 1

а) $x + 15 = 34$		б) $17 + x = 52$	
Решение:	Проверка:	Решение:	Проверка:
$x = 34 - 15$	$19 + 15 = 34$	$x = 52 - 17$	$17 + 35 = 52$
$x = 19$	$19 = 19$	$x = 35$	$52 = 52$
в) $x - 14 = 31$		г) $55 - x = 23$	
Решение:	Проверка:	Решение:	Проверка:
$x = 31 + 14$	$45 - 14 = 31$	$x = 55 - 23$	$55 - 32 = 23$
$x = 45$	$31 = 31$	$x = 32$	$23 = 23$
д) $x \cdot 12 = 72$		ѓ) $19 \cdot x = 133$	
Решение:	Проверка:	Решение:	Проверка:
$x = 72 : 12$	$6 \cdot 12 = 72$	$x = 133 : 19$	$19 \cdot 7 = 133$
$x = 6$	$72 = 72$	$x = 7$	$133 = 133$
е) $x : 14 = 13$		ж) $108 : x = 12$	
Решение:	Проверка:	Решение:	Проверка:
$x = 13 \cdot 14$	$182 : 14 = 13$	$x = 108 : 12$	$108 : 9 = 12$
$x = 182$	$13 = 13$	$x = 9$	$12 = 12$

Забележи дека со замена на добиената бројна вредност на местото на x во равенката, равенката преминува во точно бројно равенство. Решавањето равенки е постапка на откривање ваква бројна вредност.

Б) РАВЕНКИ СО ДВЕ ОПЕРАЦИИ

Оние равенки во кои се појавуваат две операции (една од прв ред - собирање или одземање и една од втор ред - множење или делење) може да ги решаваме со замена на дел од равенката со симболи или знак (□, Δ, ◊, ■ или друг знак). Ова е методот кој сакаме да го илустрираме. Истиот е познат како *метод на користење руски ознаки* и во практиката ја намалува можноста за грешки при решавањето поради тоа што во секоја етапа решаваме една елементарна равенка.

Пример 2 Согледај го решавањето на равенката $32 - 5 \cdot x = 7$ со методот на користење руски ознаки. Ако $5x$ го означиме со □, почетната равенка добива облик $32 - \square = 7$, што претставува елементарна равенка по непознатата □.

Имаме $\square = 32 - 7$

$\square = 25$

Сега во квадратчето запишуваме $5x$ и добиваме уште една елементарна равенка $5x = 25$.

Решение:	Проверка:
$x = 25 : 5$	$32 - 5 \cdot 5 = 7$
$x = 5$	$32 - 25 = 7$
	$7 = 7$

Пример 3 Нека е дадена равенката $144 : (x - 3) = 12$. Ако $x - 3$ го означиме со □, почетната равенка добива облик $144 : \square = 12$, што претставува елементарна равенка по непознатата □.

Имаме $\square = 144 : 12$

$\square = 12$

Сега во квадратчето запишуваме $x - 3$ и добиваме уште една елементарна равенка $x - 3 = 12$.

Решение:	Проверка:
$x = 12 + 3$	$144 : (15 - 3) = 12$
$x = 15$	$144 : 12 = 12$
	$12 = 12$

Заклучок Решавањето равенки во кои има две операции (една од прв ред и една од втор ред) може да се сведе на решавање две елементарни равенки.

Пример 4 Реши ги следните равенки со две операции, (една од прв ред и една од втор ред) на два начина:

а) со користење руски ознаки б) директно

Решение:

1

а) $x \cdot 9 + 24 = 87$

$\square + 24 = 87$

$\square = 63$

$x \cdot 9 = 63$

$x = 63 : 9$

$x = 7$

б) $x \cdot 9 + 24 = 87$

$x \cdot 9 = 87 - 24$

$x \cdot 9 = 63$

$x = 63 : 9$

$x = 7$

Провери дали со замена на бројот 7 на местото на x во равенката $x \cdot 9 + 24 = 87$, равенката станува точно бројно равенство.

Во секоја од следните равенки, изврши проверка на решението.

2

а) $5 \cdot x - 17 = 123$

$\square - 17 = 123$

$\square = 140$

$5 \cdot x = 140$

$x = 140 : 5$

$x = 28$

б) $5 \cdot x - 17 = 123$

$5 \cdot x = 123 + 17$

$5 \cdot x = 140$

$x = 140 : 5$

$x = 28$

3

а) $x : 4 + 52 = 58$

$\square + 52 = 58$

$\square = 58 - 52$

$\square = 6$

$x : 4 = 6$

$x = 24$

б) $x : 4 + 52 = 58$

$x : 4 = 58 - 52$

$x : 4 = 6$

$x = 6 \cdot 4$

$x = 24$

4

а) $500 : x - 3 = 17$

$\square - 3 = 17$

$\square = 17 + 3$

$\square = 20$

$500 : x = 20$

$x = 500 : 20$

$x = 25$

б) $500 : x - 3 = 17$

$500 : x = 17 + 3$

$500 : x = 20$

$x = 500 : 20$

$x = 25$

5

а) $(x + 7) \cdot 13 = 143$

$\square \cdot 13 = 143$

$\square = 143 : 13$

$\square = 11$

$x + 7 = 11$

$x = 11 - 7$

$x = 4$

б) $(x + 7) \cdot 13 = 143$

$x + 7 = 143 : 13$

$x + 7 = 11$

$x = 11 - 7$

$x = 4$

6

а) $(x - 9) : 15 = 9$

$\square : 15 = 9$

$\square = 9 \cdot 15$

$\square = 135$

$x - 9 = 135$

$x = 135 + 9$

$x = 144$

б) $(x - 9) : 15 = 9$

$x - 9 = 9 \cdot 15$

$x - 9 = 135$

$x = 135 + 9$

$x = 144$

7

а) $11 \cdot (x - 10) = 231$

$11 \cdot \square = 231$

$\square = 231 : 11$

$\square = 21$

б) $11 \cdot (x - 10) = 231$

$x - 10 = 231 : 11$

$x - 10 = 21$

$x = 21 + 10$

$x - 10 = 21$ $\quad$ $x = 31$

$x = 21 + 10$

$x = 31$

8 а) $120 : (17 + x) = 6$

$120 : \square = 6$

$\square = 120 : 6$

$\square = 20$

$17 + x = 20$

$x = 20 - 17$

$x = 3$

б) $120 : (17 + x) = 6$

$17 + x = 120 : 6$

$17 + x = 20$

$x = 20 - 17$

$x = 3$

В) РАВЕНКИ СО ТРИ ИЛИ ПОВЕЌЕ ОПЕРАЦИИ

Пример 5 Реши ја равенката со три операции $(x + 5) \cdot 12 + 28 = 184$ на два начина:

а) со користење руски ознаки $\quad$ б) директно

Решение: а) $(x + 5) \cdot 12 + 28 = 184$

Означуваме $(x + 5) \cdot 12$ со $\square$

и добиваме $\square + 28 = 184$

$\square = 184 - 28$

$\square = 156$

односно $(x + 5) \cdot 12 = 156.$

Означуваме $(x + 5)$ со $\triangle$

$\triangle \cdot 12 = 156$

$\triangle = 156 : 12$

$\triangle = 13.$

односно $x + 5 = 13$

б) $(x + 5) \cdot 12 + 28 = 184$

$(x + 5) \cdot 12 = 184 - 28$

$(x + 5) \cdot 12 = 156$

$x + 5 = 156 : 12$

$x + 5 = 13$

$x = 13 - 5$

$x = 8$

$x = 13 - 5$

$x = 8.$

Заклучок

Решавањето равенки со три операции се сведува на решавање три елементарни равенки; решавањето равенки со четири операции се сведува на решавање четири елементарни равенки; итн.

Пример 6

Согледај го решавањето равенка со четири операции $\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 + 54 = 197$ на два начина:

а) со користење руски ознаки б) директно

а)

Решение: $\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 + 54 = 197$

Означуваме $\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13$ со $\square$

и добиваме $\square + 54 = 197$

$\square = 197 - 54$

$\square = 143$

односно $\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 = 143.$

Означуваме $7 + (32 : x) = \triangle$

$\triangle \cdot 13 = 143$

$\triangle = 143 : 13$

$\triangle = 11,$

односно $7 + (32 : x) = 11.$

Означуваме $(32 : x) = \blacksquare$

и добиваме $7 + \blacksquare = 11$

$\blacksquare = 11 - 7$

$\blacksquare = 4,$

односно $32 : x = 4$

$x = 32 : 4$

$x = 8.$

б)

$\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 + 54 = 197$

$\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 = 197 - 54$

$\big(7 + (32 : x)\big) \cdot 13 = 143$

$7 + (32 : x) = 143 : 13$

$7 + (32 : x) = 11$

$32 : x = 11 - 7$

$32 : x = 4$

$x = 32 : 4$

$x = 8$

Пример 7 Согледај го решавањето равенка со пет операции $(5\cdot(7-x)+15):4+73=78$ на два начина:

а) со користење руски ознаки б) директно

Решение:

а)

$(5\cdot(7-x)+15):4+73=78$

Означуваме $(5\cdot(7-x)+15):4$ со $\square$

и добиваме $\square+73=78$

$\square=78-73$

$\square=5,$

односно $(5\cdot(7-x)+15):4=5.$

Означуваме $5\cdot(7-x)+15$ со $\triangle$

$\triangle:4=5$

$\triangle=5\cdot4$

$\triangle=20,$

односно $5\cdot(7-x)+15=20.$

Означуваме $5\cdot(7-x)$ со $\blacksquare$

и добиваме $\blacksquare+15=20$

$\blacksquare=5,$

односно $5\cdot(7-x)=5.$

Означуваме $7-x$ со $\lozenge$

и добиваме $5\cdot\lozenge=5$

$\lozenge=5:5$

$\lozenge=1,$

односно $7-x=1$

$x=7-1$

$x=6.$

б)

$(5\cdot(7-x)+15):4+73=78$

$(5\cdot(7-x)+15):4=78-73$

$(5\cdot(7-x)+15):4=5$

$5\cdot(7-x)+15=5\cdot4$

$5\cdot(7-x)+15=20$

$5\cdot(7-x)=20-15$

$5\cdot(7-x)=5$

$7-x=5:5$

$7-x=1$

$x=7-1$

$x=6$

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ги следните равенки со една операција:

а) $x + 24 = 58$
б) $21 + x = 102$
в) $x - 32 = 9$
г) $78 - x = 54$
д) $x \cdot 11 = 220$
ѓ) $24 \cdot x = 144$
е) $x : 9 = 51$
ж) $98 : x = 14$

2. Реши ги следните равенки со две операции:

а) $x \cdot 7 + 18 = 53$
б) $4 \cdot x - 17 = 43$
в) $x : 13 - 2 = 7$
г) $625 : x + 98 = 123$
д) $(x - 4) \cdot 43 = 129$
ѓ) $(x + 5) : 5 = 5$
е) $10 \cdot (13 - x) = 110$
ж) $540 : (x + 9) = 60$

3. Реши ги равенките со три или повеќе операции:
а) $(27 - x) \cdot 5 + 32 = 97$
б) $\big((54 : x) + 12\big) \cdot 15 + 31 = 346$
в) $\big(112 - 2 \cdot (x + 8)\big) : 3 + 48 = 78$

Извори:
[1] Т. Ѓорѓијевски, О. Трифуновска, А. Смилевска, Л. Филиповска, М. Петрушевски, *Збирка задачи по математика за 5 одделение*, Просветно дело Скопје, 2017.

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 1

Димитар, Павел, Марина, Олга и Марија чекаат во ред за да купат карти за кино-претстава. Се знае дека Димитар ќе купи карта пред Павел, а после Марија. Марина и Марија не се една до друга, а Олга не е ниту до Марија, ниту до Димитар, ниту до Марина. Кој е редоследот на петте деца?

Извор: Ratko Tošić, *Rešeni zadaci iz matematika za mlade matematičare*, Naučna Knjiga, Beograd, 1990.

Ирена Стојковска
Природно-математички факултет, Скопје

МЕТОД НА ОТСЕЧКИ

Методот на отсечки претставува визуелен приказ на количините и односите кои важат меѓу количините во една текстуална задача. За таа цел може да се користат отсечки или правоаголници со еднакви ширини, а чии должини одговараат на количината која ја претставуваат. Притоа, отсечките, односно правоаголниците кои одговараат на еднакви количини, пожелно е да се со иста боја, а правоаголниците да се со иста шара. На отсечките, односно на правоаголниците, кои претставуваат позната количина се запишува бројчаната вредност на количината. На овој начин, полесно се воочуваат врските кои важат меѓу количините, па следствено полесно се доаѓа до начинот на решавање на задачата и одредувањето на непознатата количина.

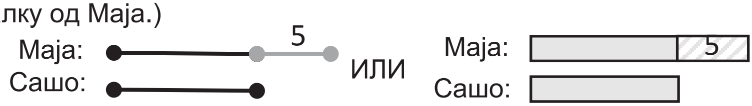
Во примерите кои следат, **аритметичкиот пристап подразбира цртеж и решавање на задачата без воведување променливи и него го препорачуваме за одделенска настава.** Методот на отсечки лесно се прилагодува на алгебарскиот пристап на решавање текстуални задачи со равенки. Алгебарскиот пристап ги подразбира цртежите, воведувањето променливи и решавањето равенки.

1. Задачи со четирите основни операции

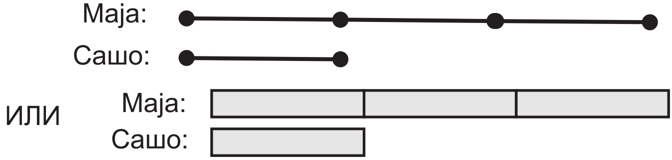
Најнапред ќе ги илустрираме на примери основните односи на количините претставени со помош на отсечки и правоаголници:

А. Маја и Сашо имаат еднаков број боички.

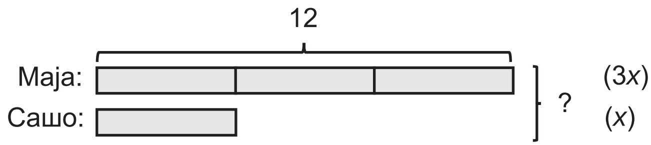
Б. Маја има 5 боички повеќе од Сашо. (Сашо има 5 боички помалку од Маја.)



В. Маја има 3 пати повеќе боички од Сашо. (Сашо има 3 пати помалку боички од Маја.)



Пример 1. Маја има 12 боички, а Сашо има 3 пати помалку боички од Маја. Колку вкупно боички имаат Маја и Сашо заедно?
Решение. Цртаме цртеж на кој единичната отсечка, односно правоаголник, се бројот на боички кои ги има Сашо. Тогаш, Маја има три такви единични правоаголници.



Аритметички пристап.

Маја има 12 боички, па должината на еден единичен правоаголник е 12 : 3 = 4, односно Сашо има 4 боички. Тогаш, Маја и Сашо заедно имаат 12 + 4 = 16 боички.

Алгебарски пристап.

x - боички на Сашо

$3x$ - боички на Маја

$3x = 12$

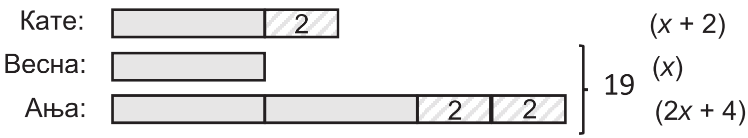
$x = 12 : 3 = 4$

Маја и Сашо заедно имаат:

$x + 3x = 4x = 4 \cdot 4 = 16$ боички.

Пример 2. Кате решила 2 задачи повеќе од Весна, а Ања решила 2 пати повеќе задачи од Кате. Ања и Весна заедно решиле 19 задачи. Колку повеќе задачи решила Ања од Кате?

Решение. Нека единичниот правоаголник се бројот на задачи кои ги решила Весна. Тогаш, бројот на задачи кои ги решиле Кате, Весна и Ања ги претставуваме со следниот цртеж:



Аритметички пристап. Прво ја наоѓаме должината на единичниот правоаголник со (19 – 2 · 2) : 3 = (19 – 4) : 3 = 15 : 3 = 5, што значи дека Весна решила 5 задачи. Кате решила 5 + 2 = 7 задачи, а Ања решила 2 · 5 + 2 · 2 = 10 + 4 = 14 задачи. Па, Ања решила 14 – 7 = 7 задачи повеќе од Кате.

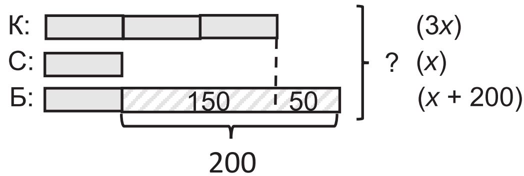
Алгебарски пристап.

x задачи решила Весна	$x+(2x+4)=19$
$(x+2)$ задачи решила Кате	$3x=15$
$(2x+4)$ задачи решила Ања	$x=15:3=5$

Ања решила $2x+4=2\cdot 5+4=10+4=14$ задачи, Кате решила $x+2=5+2=7$ задачи, значи Ања решила 14 – 7 = 7 задачи повеќе од Кате.

Пример 3. За една добротворна акција, Калина собрала 3 пати повеќе пари од Симона, Симона собрала 200 ден. помалку од Бисера, а Бисера собрала 50 ден. повеќе од Калина. Колку вкупно пари собрале трите другарки заедно?

Решение. Единичиот правоаголник се парите кои ги собрала Симона. Тогаш, според условите на задачата се добива следниот цртеж:



Аритметички пристап. Од цртежот гледаме дека вредноста на два единични правоаголници е 200 – 50 = 150, значи еден единичен правоаголник е 150 : 2 = 75, односно Симона собрала 75 ден. Калина собрала 3 · 75 = 225 ден., а Бисера собрала 75 + 200 = 275 ден. Сите три другарки заедно собрале 225 + 75 + 275 = 575 ден.

Алгебарски пристап.

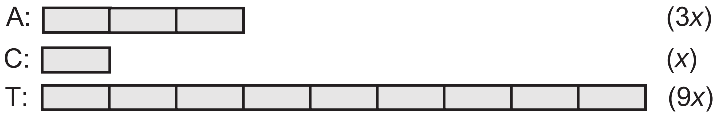
x пари на Симона	$(x+200)-50=3x$
$3x$ пари на Калина	$150=2x$
$(x+200)$ пари на Бисера	$x=150:2=75$

Значи, Симона собрала 75 ден., Калина собрала $3x = 3 \cdot 75 = 225$ ден., Бисера собрала $x + 200 = 75 + 200 = 275$ ден., а сите три другарки заедно собрале 225 + 75 + 275 = 575 ден.

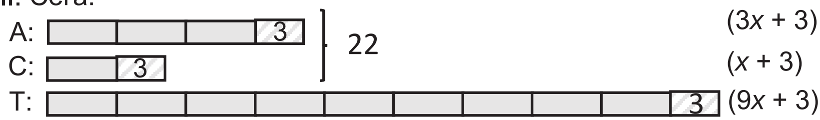
Пример 4. Пред 3 години Алек имал 3 пати повеќе години од сестра му, а 3 пати помалку години од татко му. Алек и сестра му сега имаат 22 години заедно. После колку години татко му на Алек ќе има 2 пати повеќе години од Алек?

Решение. На првиот цртеж ги претставуваме годините кои ги имале Алек (А), сестра му (С) и татко му (Т), пред 3 години, притоа единичниот правоаголник одговара на годините кои ги имала сестра му пред 3 години. На вториот цртеж ги претставуваме сегашните години на Алек, сестра му и татко му.

I. Пред 3 години:



II. Сега:



Аритметички пристап. Од вториот цртеж добиваме дека единичниот правоаголник е (22 – 2 · 3) : 4 = (22 – 6) : 4 = 16 : 4 = 4, што значи дека сега Алек има 3 · 4 + 3 = 12 + 3 = 15 години, сестра му има 4 + 3 = 7 години, а татко му има 9 · 4 + 3 = 36 + 3 = 39 години.

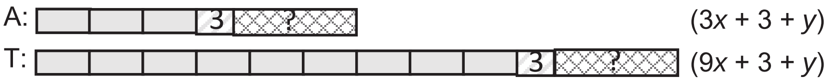
Алгебарски пристап.

x годините на сестрата пред 3 год.	$(3x+3)+(x+3)=22$
$3x$ годините на Алек пред 3 год.	$4x=16$
$9x$ годините на таткото пред 3 год.	$x=16:4=4$

Алек сега има $3x+3=3\cdot 4+3=12+3=15$ години, сестра му сега има $x+3=7$ години, а татко му сега има $9x+3=39$ години.

Понатаму, за да најдеме по колку години татко му на Алек ќе има 2 пати повеќе години од Алек, цртаме цртеж за годините на Алек и татко му после одреден број години.

III. По ? години:



Аритметички пристап. Бидејќи тогаш, татко му ќе има два пати повеќе години Алек, тоа значи дека, ако од годините на татко му ги одземеме годините на Алек (три единични правоаголници, еден кој одговара на 3 години и еден кој одговара на непознатиот број години), ќе добиеме 6 единични правоаголници кои одговаат на тогашните години на Алек. Значи, Алек ќе има $6 \cdot 4 = 24$ години. Алек сега има 15 години, што значи дека по $24 - 15 = 9$ години, татко му ќе има два пати повеќе години од Алек. Проверка: Татко му сега има 39 години, па по 9 год. тој ќе има $39 + 9 = 48$ год., што е два пати повеќе од 24 години, колку што ќе има Алек по 9 години.

Алгебарски пристап.

y години, за кои, таткото ќе биде 2 пати постар од Алек

$3x+3+y=12+3+y=15+y$ тогашните години на Алек

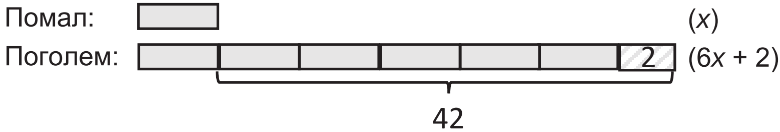
$9x+3+y=36+3+y=39+y$ тогашните години на татко му

$$39+y=2(15+y) \Rightarrow 39+y=30+2y \Rightarrow y=9$$

Значи, по 9 години татко му на Алек ќе биде 2 пати постар од Алек.

Пример 5. Разликата на два броја е 42. Кога поголемиот ќе се подели со помалиот се добива количник 6 и остаток 2. Кои се тие броеви?

Решение. Нека единичниот правоаголник одговара на помалиот број. За поголемиот број имаме дека се состои од 6 такви правоаголници и уште еден правоаголник кој одговара на големина 2. Исто така, поголемиот број е за 42 поголем од помалиот. Така, го добиваме цртежот:



Аритметички пристап.

Од цртежот наоѓаме дека вредноста на еден единичен правоаголник, односно помалиот број е (42 – 2) : 5 = 40 : 5 = 8. Тогаш, поголемиот број е 8 + 42 = 50.

Алгебарски пристап.

x - помалиот број

$6x+2$ - поголемиот број

$$(6x+2)-x=42$$

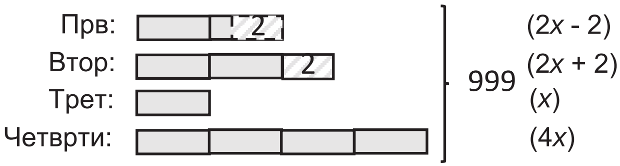
$$5x=40 \Rightarrow x=40:5=8$$

$$6x+2=6\cdot 8+2=50$$

Тие броеви се 50 и 8.

Пример 6. Збирот на четири природни броеви е 999. Ако првиот број го зголемиме за 2, вториот број го намалиме за 2, третиот го зголемиме 2 пати, а четвртиот го намалиме 2 пати, ќе добиеме еднакви броеви. За кои четири природни броеви станува збор?

Решение. Цртаме цртеж во кој единичниот правоаголник е третиот број. На цртежот, **отсуството на количина го претставуваме со испрекинати линии**, така првиот број се состои од два единични правоаголници, од кои е изваден правоаголник со вредност 2.



Аритметички пристап. Од цртежот се согледува дека збирот на сите четири броја е всушност еднаков на вредноста на 9 единични правоаголници (правоаголникот со вредност 2 кој е дел од вториот број, го надополнува првиот број до два единични правоаглници). Па затоа, вредноста на еден единичен правоаголник, односно третиот број е 999 : 9 = 111. Тогаш, првиот број е 2 · 111 – 2 = 220, вториот број е 2 · 111 + 2 = 224 и четвртиот број е 4 · 111 = 444.

Алгебарски пристап.

x - третиот број

$(2x-2)$ - првиот број

$(2x+2)$ - вториот број

$4x$ - четвртиот број

$$(2x-2)+(2x+2)+x+4x=999$$

$$9x=999$$

$$x=111$$

Значи, третиот број е 111, првиот број е $2x-2=220$, вториот број е $2x+2=224$ и четвртиот број е $4x=444$.

Задачи за самостојна работа

1. Марко и Филип потрошиле заедно 1030 ден. за пазарување, при што Марко потрошил 110 ден. повеќе од Филип. Колку пари потрошил Марко?

2. Дедо Мите едно попладне собрал вкупно 245 овошки: јаболка, круши и сливи. Тој собрал 5 пати повеќе јаболка отколку круши. Собрал 70 сливи повеќе од круши. Колку повеќе јаболки од сливи собрал дедо Мите?

3. Мартин има 34 џамлии повеќе од Лука, Александар има два пати повеќе џамлии од Мартин, а Коста има 100 џамлии помалку од Александар. По колку џамлии има секој од другарите Лука, Мартин, Александар и Коста, ако сите четворица заедно имаат 214 џамлии?

4. Митко е четири пати постар од Стево, а е четири години помлад од Коста. Коста и Стево заедно имаат 49 години. Колку години ќе има Митко после 7 години?

5. Јас имам 4 пати повеќе години отколку што имала сестра ми кога била 2 пати помлада од мене. Колку години имам јас, а колку има сестра ми, ако за 15 години, ние заедно ќе имаме 100 години?

(продолжува во следниот број)

Извори:

[1] И. Стојковска, *Решавање текстуални задачи со метод на отсечки*, Есенска математичка школа 2019, СММ, октомври-ноември 2019.

[2] М. Шариќ, *Метода дужи*, Математички лист XLIV-3 (2009), 1-4.

[3] S.J.Choo, K.T.Hong, Y.S.Mei, J.Lim, *Singapore Model Method for Learning Mathematics*, Marshall Cavendish Education, 2009.

Петар Соколоски
Природно-математички факултет, УКИМ, Скопје

ТЕОРЕМА НА ПИТАГОРА (втор дел)

УШТЕ НЕКОЛКУ ДОКАЗИ

Во минатиот број кажавме дека теоремата на Питагора е толку стара што не може со сигурност да се каже кога се појавила за прв пат. Сепак, оваа теорема која наизглед е многу едноставна, е еден од најважните и најприменливите закони во математиката. Како таква, таа ги привлекувала математичарите, оние кои имале само основни познавања од геометријата, ученици, наставници по математика, уметници и претседатели, познати и непознати, да пробаат да најдат некој нов нејзин доказ. Самиот Евклид во неговите „Елементи“ дал барем два докази за оваа теорема. Едниот веќе го прикажавме, а вториот ќе биде изложен подолу.

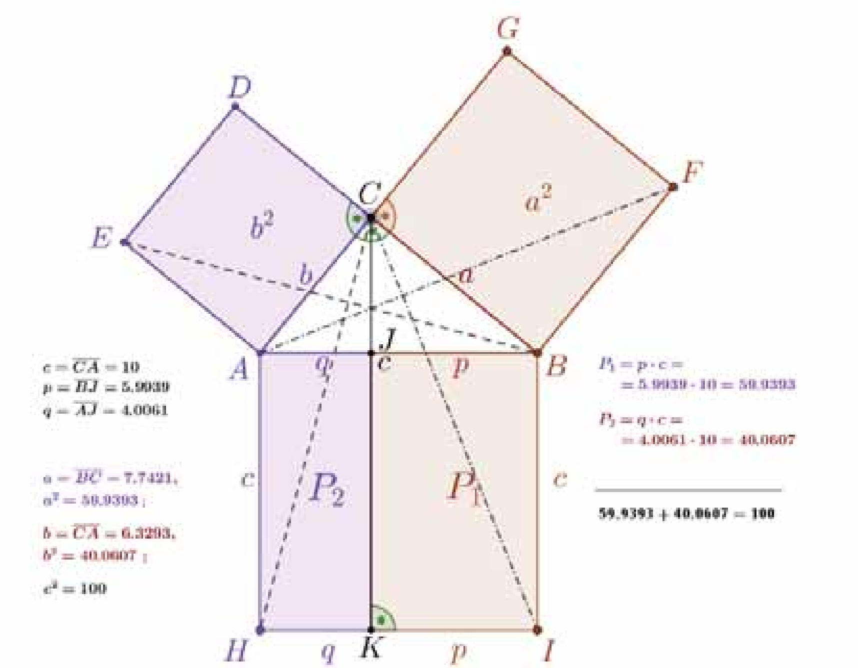
Со развојот на математичките знаења биле добиени различни типови на докази:

- геометриски - докази во кои се користи сечење и лепење на геометриски форми, складност и поплочување (теселација), докази во кои се користат формулите и својствата за плоштина, сличност итн.
- алгебарски - докази во кои се користат својствата на алгебарските изрази,
- тригонометриски, аналитички и други.

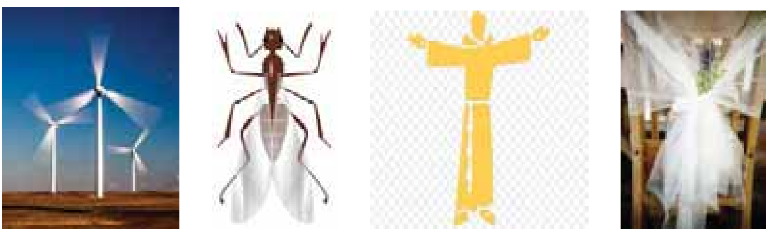
Доказот кој беше изложен во претходниот број е геометриски доказ затоа што во него се користи поимот складност на триаголници и формулата за плоштина на триаголник и четириаголник. Тој доказ, или цртежот во него е познат и како „Ветерница“, „Крилест инсект“, „Францисканска наметка“, „Стол за невеста“ или „Паунова опашка“, имиња кои означуваат појави кои личат на формата на цртежот. Постои анегдота дека оваа теорема ја викале и „магарешка“ теорема затоа што оние ученици кои ја знаеле на памет, а не знаеле да ја докажат, нивните соученици на шега ги викале „магариња“ ☺ .

Специјално за читателите на „Нумерус“, изготвив аплет (види слика 1) во програмата Геогебра (Geogebra) преку која може да се видат промените на плоштините кои се случуваат при промена на хипотенузата и темето кај кое е правиот агол. Неа може да ја најдете на следната адреса:

https://www.geogebra.org/m/av8rjb4p



Слика 1.1 - „Ветерницата“ во Geogebra во која е илустриран доказот на Евклид



Слика 1.2 – Различни форми

на кои потсетува цртежот на слика 1.1

Во продолжение ќе бидат изложени некои други докази, тврдења поврзани со Питагоровата теорема и некои нејзини примени.

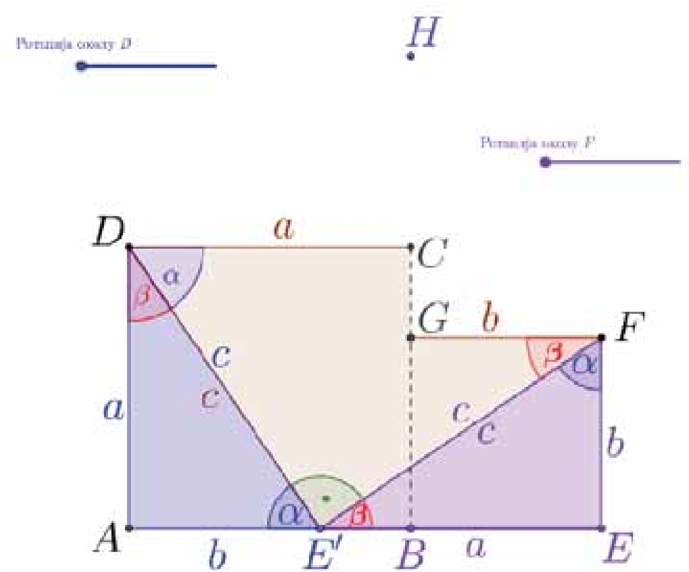
Наједноставни и најочигледни се доказите во кои од некоја форма се сечат одредени делови и се формира друга форма, а плоштината на почетната и крајната форма ја даваат врската во теоремата на Питагора.

И следниот доказ е геометриски. Започнуваме од два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ со страни $\overline{AB}=a$ и $\overline{BE}=b$ соодветно (види слика 2.1). Тие имаат заедничко теме B, а точките A, B, E се колинеарни. На страната AB ја бираме точката E' т.ш. $\overline{AE'}=b$. Триаголникот $AE'D$ е правоаголен со катети $\overline{AD}=a$ и $\overline{AE'}=b$. Јасно е дека хипотенузата му е c. Слично, триаголникот FEE' е правоаголен со катети $\overline{EE'}=a$ и $\overline{EF}=b$ и хипотенуза $\overline{FE'}=c$. Ако триаголникот $AE'D$ се ротира за 90° во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот околу темето D, а триаголникот EFE' се ротира за 90° во насоката на движењето на стрелките на часовникот околу темето F, тогаш се добива квадрат $E'FHD$ со страна со должина c (види слика 2.2). Овој доказ може да се најде на следнава адреса:

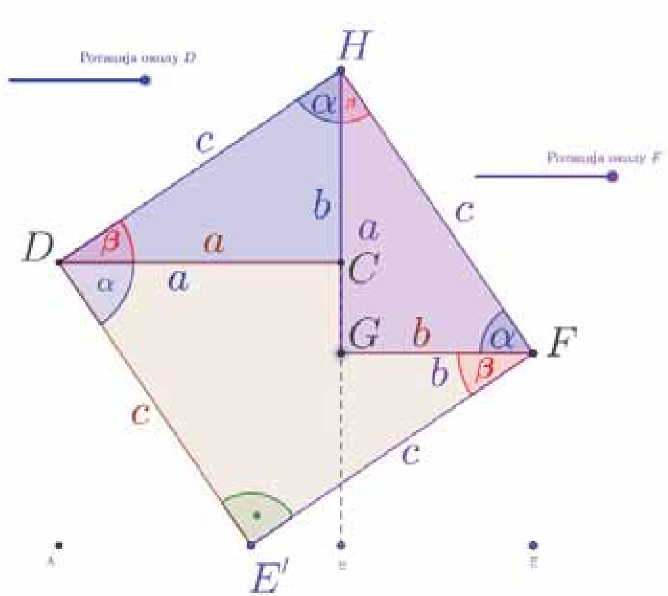
https://www.geogebra.org/m/n3xfdyrn

Им препорачувам на наставниците и учениците да го разгледаат аплетот и да пробаат самите да направат нешто слично. Со влечење на точките B и E се добиваат различни случаи. Математичката точност на доказот следи затоа што збирот на аглите α и β е 90° и од складноста на триаголниците $AE'D$, CHD, EFE' и GFH .

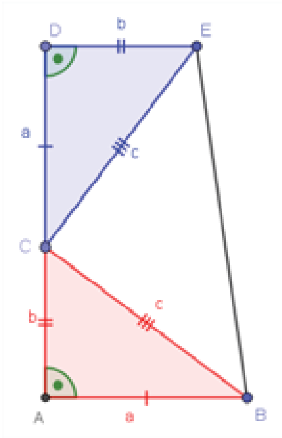
Втор доказ даден од Евклид во неговите „Елементи“ е тврдењето 31 во книга VI.



Слика 2.1



Слика 2.2.



Слика 3. Доказ на претседателот Џ. А. Гарфилд

Ќе го наведеме уште доказот кој му се препишува на претседателот на САД Џ. А. Гарфилд од 1876 година.

Се конструира трапез кој е составен од два складни правоаголни триаголници со катети a и b и хипотенуза c и еден рамнокрак правоаголен триаголник со крак c. Неговата плоштина изнесува

$$P = 2\cdot\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

Од друга страна, основите на трапезот се a и b, а висината му е $a+b$ па плоштината му е

$$P = \frac{a+b}{2}\cdot(a+b) = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{2} = ab + \frac{a^2+b^2}{2}$$

Добиваме дека $ab + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{a^2+b^2}{2}$, т.е. $\frac{c^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$

или $c^2 = a^2 + b^2$.

Задача 1. Најдете 10 различни докази на теоремата на Питагора. Потоа цртежите пробајте да ги нацртате во Геогебра или направете колажи од картон и објаснете им ги доказите на вашите соученици.

ОБРАТНАТА ТЕОРЕМА НА ПИТАГОРА

Најчесто теоремите се содржат од два дела – претпоставка и последица (резултат). Претпоставката е делот во кој се изложени условите на теоремата, т.е. тврдењата кои ги земаме за точни, а последицата го содржи тврдењето кое треба да се изведе (докаже) од претпоставката по пат на логичко расудување. За теоремите е многу важно да се провери дали е точно и обратното тврдење (теорема). А што е тоа обратна теорема?

Ако е дадена некоја теорема, обратна теорема е тврдење во кое претпоставката од основната теорема станува последица, а последицата станува претпоставка. Така, во теоремата на Питагора претпоставката е дека триаголникот е правоаголен и тоа е тврдењето од кое се тргнува и за кое сме сигурни дека е точно. Последицата е тврдењето кое треба да се докаже, т.е. дека збирот на квадратите на катетите (пократките страни) е еднаков со квадратот на хипотенузата (најдолгата страна).

Обратната теорема на теоремата на Питагора гласи:

Ако збирот на квадратите на двете пократки страни во еден триаголник е еднаков на квадратот на најдолгата страна, тогаш тој триаголник е правоаголен со прав агол спроти најдолгата од страните.

Ќе ја покажеме точноста на ова тврдење. Многу често, наместо поимот обратно тврдење (тврдење во обратната насока), погрешно се користи поимот спротивно тврдење, кое всушност означува негација на тврдењето. Спротивно тврдење на теоремата на Питагора е: во правоаголен триаголник збирот на квадратите на катетите НЕ Е еднаков на квадратот на хипотенузата. Обратното тврдење е точно, но спротивното не е точно.

Нека ABC е триаголник кај кој $\overline{BC} \le \overline{AC} \le \overline{AB}$ и важи $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$. Треба да докажеме дека во $\triangle ABC$ еден од аглите е прав. Нека XYZ е правоаголен триаголник кај кој катетите се еднакви на помалите страни од триаголникот ABC, т.е.

$$\overline{BC} = \overline{YZ},\ \overline{AC} = \overline{XZ},\ \angle XZY = 90^\circ$$ (види на слика 4).

Ваков триаголник сигурно постои и е единствен до складност, т.е. ако постојат два такви триаголника, тогаш тие се складни. (Зошто?) Од Питагоровата теорема имаме

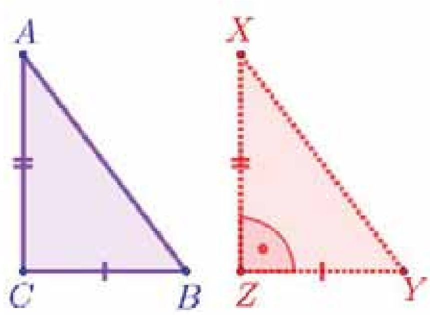
$$\overline{XY}^2 = \overline{XZ}^2 + \overline{YZ}^2.$$

Заради $\overline{BC} = \overline{YZ},\ \overline{AC} = \overline{XZ}$, се добива $\overline{XY}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$. Заради $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$, се добива $\overline{XY}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{XY} = \overline{AB}$.

Според признакот за складност ССС добиваме $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$. Затоа,

$$\angle ACB = \angle XZY = 90^\circ,$$

т.е. триаголникот ABC е правоаголен. Ова е тоа што требаше да се докаже. ■



Слика 4. Обратна теорема на Питагоровата

Задача 2. Докажи дека во доказот на обратната теорма на Питагоровата, ако триаголниците XYZ и PRQ се правоаголни и со страни $\overline{BC} = \overline{YZ} = \overline{QR}, \overline{AC} = \overline{XZ} = \overline{PR}, \angle XZY = \angle PRQ = 90^\circ$, тогаш тие се складни. (Нацртај ги убаво елементите и определи го признакот.)

Со помош на ова тврдење може со сигурност да се каже дали три отсечки со дадени должини можат да бидат страни на правоаголен триаголник.

Пример. Триаголникот со страни 3, 4 и 5 е правоаголен затоа што $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Задача 3. Дали постои правоаголен триаголник со страни:

а) $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$; б) 3, 4, 6; в) 4, 5, 6; г) 5,12,13;

д) 6, 8, 10; ѓ) 6, 9, 12; е) 8, 15, 17; ж) 1, 1, $\sqrt{2}$;

з) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; ѕ) 5, 6, $\sqrt{61}$; и) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$?

Тројките од цели броеви кои се страни на правоаголен триаголник се викаат Питагорови тројки. Ако (a, b, c) е една Питагорова тројка и $k \in \mathbb{N}$ е произволен, тогаш и тројката (ka, kb, kc) Питагорова тројка. Тоа значи дека постојат бескрајно многу Питагорови тројки.

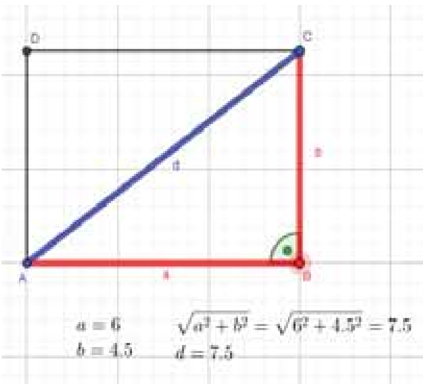
ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Теоремата на Питагора има огромна примена, како во геометријата така и во практиката На пример, со неа се пресметува дијагоналата кај правоаголник, висината кај рамнокрак триаголник, висината и плоштината кај рамностран триаголник, должината на отсечка во координатен систем, итн. Ќе ги илустрираме овие задачи со неколку примери.

Нека е даден правоаголник $ABCD$ со страни $a=\overline{AB}=4cm$ и $b=\overline{BC}=3cm$. Колкава е дијагоналата $\overline{AC}$?

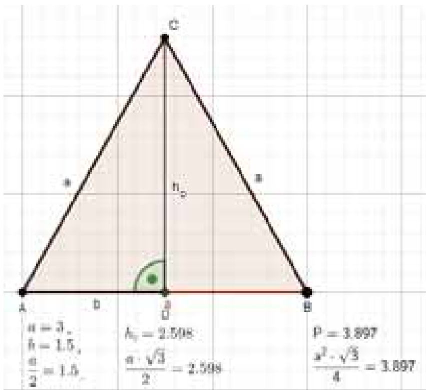
Јасно е дека триаголникот ABC е правоаголен и затоа е исполнето равенството

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=9+16=25cm^2 \Rightarrow \overline{AC}=5cm .$$



https://www.geogebra.org/m/ftxkpm6p

Слика 5.1 Дијагонала во правоаголник

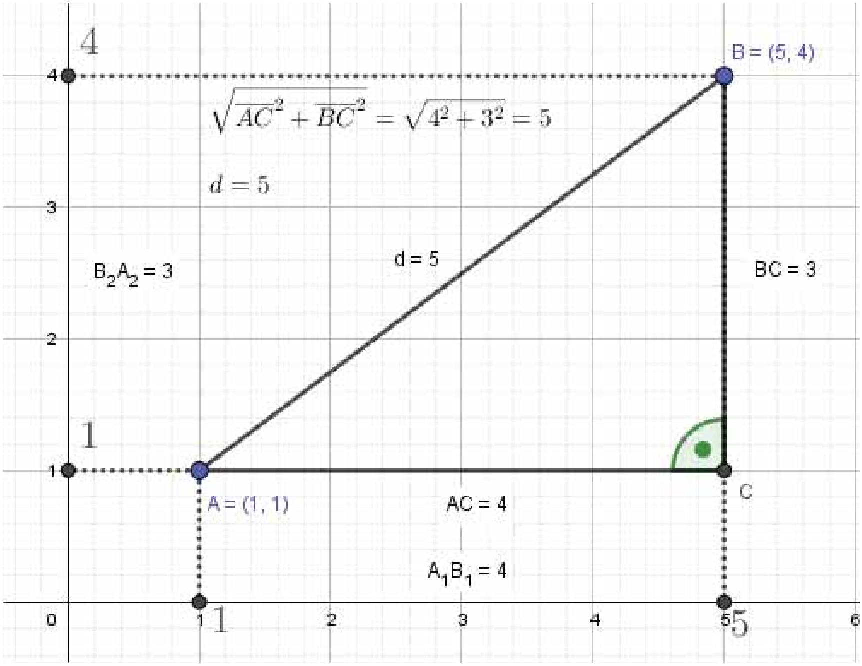


https://www.geogebra.org/m/a4r5xptg

Слика 5.2 Висина и плоштина на рамностран триаголник

На адресата https://www.geogebra.org/m/a4r5xptg може да се провери како се менуваат вредностите на висината и плоштината на триаголникот.

Ако е даден рамностран триаголник ABC со страна a и од неговото теме C ја спуштиме висината h_c, тогаш лежиштето на висината ја дели основата AB на пола и во исто време таа е симетрала на AB (види слика 5-2). Преку теоремата на Питагора лесно се изразува висината $h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а потоа и плоштината $P = \frac{a \cdot h_c}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



https://www.geogebra.org/m/e6pgqrqn

Слика 6 Растојание помеѓу две точки во Декартов правоаголен координатен систем

Една од најважните примени на теоремата на Питагора е при одредувањето на растојанието помеѓу две точки во рамнината и просторот. Нека $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$ се две точки претставени со нивните координати во $xOy-$рамнината (види слика 5-3). Проекцијата на отсечката AB врз x -оската има должина еднаква на апсолутната вредност од разликата на првите координати $|A_1 - B_1| = p$, додека проекцијата на AB врз y-оската има должина еднаква на апсолутната вредност од разликата на вторите координати $|A_2 - B_2| = q$. Оттука добиваме:

$$d = \sqrt{|A_1 - B_1|^2 + |A_2 - B_2|^2} = \sqrt{p^2 + q^2} .$$

Задача 4. а) Определи ја висината и плоштината на рамностран триаголник со страна $a = 3cm$.

б) Определи ја основата и плоштината кај рамностран триаголник со висина $h_a = 3\sqrt{3}cm$.

в) Определи го растојанието помеѓу точките:

i) (2,4) и (7,16); ii) (-2,4) и (7,6); iii) (0,-2) и (-3,6).

На интернет има голем број на игри во кои се користи теоремата на Питагора. На пример, во следнава игра не е позната само една страна од правоаголниот триаголник и треба да се најде:

http://www.math-play.com/Pythagorean-Theorem-Game.html

Многу популарна игра помеѓу младите математичари е Питагореа (Pythagorea) која е достапна на Google Play и може да се инсталира на мобилните телефони или таблети. Во неа има многу интересни загатки и задачи, од лесни па до вистински предизвици. Им ја препорачувам на сите кои сакаат да го вежбаат својот математички осет на мобилните апарати.

Извори:

[1] A. Bogomolny, Cut The Knot - Bride's Chair, https://www.cut-the-knot.org/ctk/BridesChair.shtml
[2] Euclid's Elements, Book I, Proposition 47, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html
[3] Euclid's Elements, Book I, Proposition 48, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI48.html
[4] Pythagorean Theoren and its many proofs, https://www.faculty.umb.edu/gary_zabel/Courses/Phil%20281b/Philosophy%20of%20Magic/Arcana/Neoplatonism/Pythagoras/index.shtml.html#1

Делчо Лешковски

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

Својството на математичкиот објект кое не се менува при некоја трансформација се нарекува ***инваријанта*** на таа трансформација. Зборот инваријанта значи непроменета. *Методот на инваријанти* најчесто се користи при решавање на задачи во кои се испитува дали може со повеќекратна примена на дадена трансформација, од состојба X да се премине во состојба Y. Ако се најде пример со кој се покажува како тоа да се направи, т.е. како и колку пати да се примени трансформацијата, тогаш одговорот е позитивен. Ако се пронајде инваријанта на таа трансформација која нема иста вредност за тие две состојби, следува дека со примената на таа трансформација, од состојбата X не може да се премине во состојбата Y, односно одговорот е негативен. Методот на инваријанти ќе биде илустриран со следните неколку примери.

Пример 1. Природните броеви од 1 до 99 се запишани во низа. Лиле брише два од броевите и во низата ја запишува нивната разлика. Потоа ја повторува оваа операција повеќекратно, се додека во низата не остане само еден број. Дали е тој број парен?

Решение. Нека S е бројот на непарни броеви во низата. На почетокот $S = 50$.

Нека Лиле ги избришала броевите a и b. Има три случаи:

а) Двата броја a и b се парни. Во тој случај бројот на непарните броеви не се менува бидејќи разликата на a и b е парен број.

б) Двата броја a и b се непарни. Во овој случај бројот на непарните броеви се намалува за два бидејќи разликата на a и b е парен број.

в) a и b имаат различна парност, т.е. едниот е парен, а другиот непарен. Во овој случај бројот на непарните броеви не се менува зашто разликата на a и b е непарен број.

Значи секоја операција или го намалува S за 2 или не го менува. Парноста на S се запазува, т.е. S е секогаш парен. На крајот, кога ќе остане само еден број во низата, важи $S \leq 1$ (Бројот е или парен или непарен), но од претходната дискусија следува дека $S = 0$.

Добиваме дека последниот број што останал е парен.
Во оваа задача, при операцијата извршувана од Лиле, парноста на бројот на непарни броеви е постојана (секогаш беше парен број). Во такви случаи велиме дека „*парноста е инваријанта*“.

Пример 2. Во низа се запишани првите 666 природни броеви. Дали може меѓу овие броеви да се вметнат знаците + и -, така што крајниот резултат е 0?

Решение. Запишани се 333 парни и 333 непарни броеви. Бидејќи има непарен број непарни броеви, како и да се вметнат знаците, резултатот ќе биде непарен број. Следува дека не може да биде 0.

Пример 3. На една картичка са запишани броевите (19, 94). Ана, Елена и Кате можат да ги заменат броевите на картичката по следните правила:

- Ана ги менува броевите (a, b) со ($a – b$, b);
- Елена ги менува броевите (a, b) со ($a + b$, b);
- Кате ги менува броевите (a, b) со (b, a).

Секое девојче може да ја изврши својата операција неколку пати (најмалку еднаш), пред да ја даде картичката на друго девојче (кое исто така ја извршува операцијата еднаш или неколку пати) и.т.н. Девојчињата може да си ја подаваат картичката меѓусебно по неколку пати. Може ли после неколку такви операции на картичката да пишува:
а) (19, 95); b) (19, 96)?

Решение.

а) И трите операции го запазуваат најголемиот заеднички делител (НЗД) на броевите (a, b). Но НЗД (19, 94) = 1, а НЗД (19, 95) = 19, така што парот (19, 95) не може да се добие.

б) Да забележиме дека НЗД (19, 96) = 1. Парот (19, 96) може да се добие со следната низа операции, во која А е за Ана, Е е за Елена и К е за Кате:

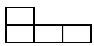
К: (94; 19); АААА: (18, 19); К: (19, 18); А: (1, 18); К: (18, 1); Е: (19, 1); К: (1, 19);

ЕЕЕЕЕ: (96, 19); К: (19, 96).

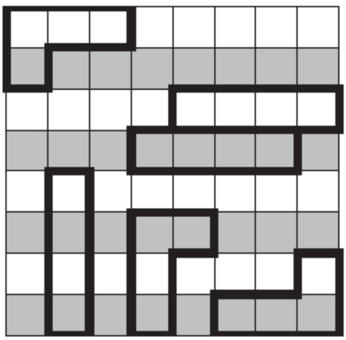
Во оваа задача НЗД на двата броја не се менуваше, т.е. беше инваријанта, после операцијата извршена од девојчињата.

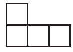
Пример 4. Даден е шестаголник *ABCDEF*. На темињата *A* и *C* е запишан бројот 1, а на останатите 0. Боби избира две соседни темиња (сврзани со страна на шестаголникот) и ги зголемува броевите запишани на нив за 1. Оваа операција може да се извршува повеќе пати. Може ли Боби да ги изедначи шесте броеви после определен број операции?

Решение. Нека броевите на темињата после n-тата операција на Боби се $a_n, b_n, ..., f_n$.
На почетокот имаме $a_0 = c_0 = 1$ и $b_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$.
За секое n да означиме $S_n = a_n - b_n + c_n - d_n + e_n - f_n$.
Тогаш $S_0 = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 - f_0 = 1-0+1-0+0-0 = 2$.
Да провериме што се случува ако Боби ги избере соседните темиња A и B. Тогаш броевите таму се зголемуваат за 1: $a_1 = a_0 + 1$, $b_1 = b_0 + 1$. Тогаш $a_1 - b_1 = a_0 - b_0$. Останатите броеви не се менуваат при оваа операција ($c_1 = c_0$, $d_1 = d_0$, $e_1 = e_0$, $f_1 = f_0$), така што $S_1 = S_0 = 2$. Истиот резултат се добива и ако Боби избере некои други две соседни темиња наместо A и B.
Така, за секој природен број k имаме $S_{k+1} = S_k = . . . = S_1 = S_0 = 2$.
Со други зборови, S_n не се менува за никое n и значи е **инваријанта** на разгледуваната операција.
Ако шесте броеви на темињата се изедначат, би добиле $S_n = 0$, што е невозможно.
Значи одговорот на задачата е „**не**“.

Пример 5. Дали може стандардна шаховска табла да се покр ие со 15 правоаголници 1×4 и една фигура со обликот  ?

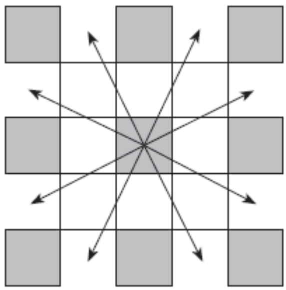
Решение. Да ја обоиме шаховската табла по редови (како на сликата). Бројот на обоени единечни квадратчиња е 32.



Како и да поставиме правоаголник 1×4 на таблата, тој покрива парен број обоени квадратчиња-0, 2 или 4. Следува дека 31 правоаголник 1×4 покриваат парен број обоени квадратчиња. Бидејќи бројот на сите обоени квадратчиња е 32, следува дека после поставувањето на правоаголниците, останува парен број обоени квадратчиња. Но, како и да ја поставиме фигурата , таа покрива едно или три обоени квадратчиња, т.е. непарен број квадратчиња. Значи, такво покривање е невозможно.

Пример 6. Дали може коњ да тргне од полето А1 (црното поле во долниот лев агол) на стандардна шаховска табла, да стапне на секое поле точно по еднаш и да запре на полето Н8 (црното поле во горниот десен агол)?

Решение. “Трикот” во овој пример е користење на стандардното црно-бело боење на таблата (**шаховско боење**). При секое движење, коњот ја менува бојата на своето поле-од црно на бело или од бело на црно.

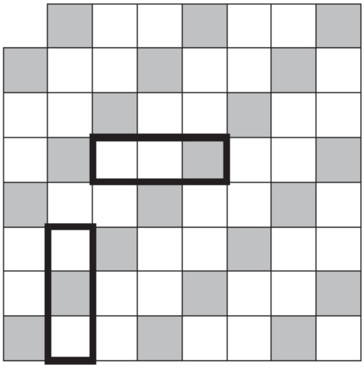


На шаховската табла има 64 полиња, 32 бели и 32 црни. Ако коњот тргне од полето А1 (црно) и ги помине сите 64 полиња (парен број) на таблата точно по еднаш, тогаш неговата маршрута може да се опише со: ЦБЦБ...ЦБЦБ (Ц-црно, Б-бело). Последното 64-то поле во маршрутата е бело, но полето Н8 е црно. Следува дека не е возможно коњот да тргне од А1, да стапне на секое поле точно по еднаш и да запре на Н8.

Пример 7. Од стандардна шаховска табла е отсечено поле што се наоѓа на еден од аглите на таблата. Дали може останатиот дел да се покрие со правоаголници 1×3?

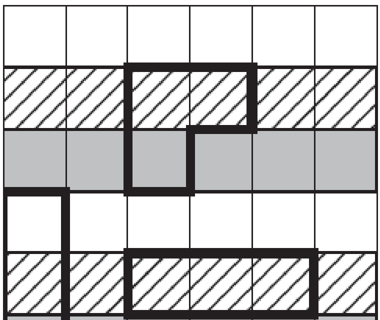
Решение. После отсекувањето, на шаховската табла остануваат 63 полиња. Ако покривањето е возможно, потребни се $63:3=21$ правоаголник 1×3.

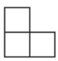
Да го разгледаме следното **дијагонално боење** на таблата.

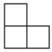


На овој начин се добиваат 22 обоени полиња. Како и да се постави правоаголник 1×3 на таблата, тој ќе покрива точно едно обоено поле. Оттука, следува дека 21 правоаголник ќе покриваат точно 21 обоено поле. Едно поле останува непокриено. Следува дека таблата не може да се покрие на бараниот начин.

Пример 8. Дали може квадрат 6×6 да се покрие со 11 правоаголници 1×3 и една фигура со обликот ?
Решение. Да ја обоиме таблата во три бои, по редови.



Да претпоставиме дека таблата може да се покрие. Нека n е бројот на искористени правоаголници 1×3 кои се поставени вертикално на таблата. Секој вертикален правоаголник покрива по едно поле од секоја боја. Следува дека за  и хоризонталните правоаголници остануваат по $12-n$ полиња од секоја боја.

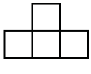
Фигурата  покрива две полиња од една боја и едно поле од друга. После нејзиното поставување на таблата, за хоризонталните правоаголници остануваат $10-n$ полиња од едната боја, $11-n$ полиња од другата и $12-n$ од третата боја.

Да ги разгледаме хоризонталните правоаголници. Секој од нив покрива три полиња од иста боја. Но, од броевите $10-n$, $11-n$ и $12-n$, точно еден е делив со 3. Следува дека останатите полиња не можат целосно да се покријат со хоризонтални правоаголници.

Добивме контрадикција на нашата претпоставка, односно, покривањето е невозможно.

Задачи за самостојна работа

1. Дадена е низа от пет броеви: 2, 2, 3, 4, 4. Во еден чекор, два од нив, a и b, се заменуваат со $2a-b$ и $2b-a$.
а) Дали може после одреден број вакви чекори да се добие низата 0, 2, 3, 4, 6?
б) А низата 2, 2, 3, 4, 6?
2. Ана напишала 20 цели броеви, од кои 7 се непарни. Таа брише два од броевите и го запишува збирот на нивните квадрати. Ја повторува оваа операција повеќекратно, се додека на крајот не остане само еден број. Дали е тој број парен или непарен?
3. Во еден фрижидер има 36 шишиња, од кои 19 се полни, а другите празни. Случајно избираме две шишиња. Ако точно едно е полно, го враќаме само него во фрижидерот. Ако двете се празни, враќаме едно од нив во фрижидерот. Ако двете се полни, празниме едно од нив и тоа го враќаме во фрижидерот. Дали е полно последното шише што ќе остане во фрижидерот?
4. Дали може стандардна шаховска табла да се покрие со 32 домино фигури, така што 17 домино фигури се поставени вертикално, а 15 домино фигури-хоризонтално?
5. Дали може квадрат 10×10 да се покрие со фигури со обликот

 ?

6. Дали може правоаголник 6×10 да се покрие со правоаголници 1×4?

* * *

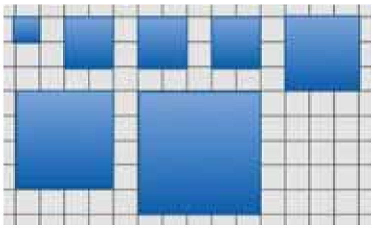
(Решенијата ќе бидат дадени во следниот број.)

Извори:

[1] Ивайло Кортезов, Светлозар Дойчев, Състезателни задачи по математика за 7. - 8. клас, 2010.
[2] Емил Колев, Невена Събева, Математика за напреднали, 2016.
[3] Државни семинар Друштва математичара Србије, Београд 2016

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 2

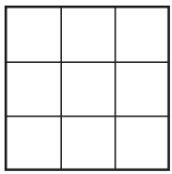
Седум квадрати со должини на страните 1, 2, 2, 2, 3, 4 и 5 единици соодветно, може да се распоредат без празнини и преклопувања и да формираат правоаголник. Која е големината на пократката страна на тој правоаголник?



Извор: Aplusclick, https://www.aplusclick.org/

МАТЕМАТИЧКА ЗАГАТКА 3

Распореди ги броевите од 1 до 9 во деветте полиња во квадратот, така што разликата меѓу збирот на два од броевите и третиот број да е еднаква во секој ред, секоја колона и двете дијагонали.



Извор: H. E. Dudeney, *536 Puzzels and Curious Problems*, Charles Scribner’s Sons, 1967.

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

4 **одделение**

3660. Одреди ја разликата на најмалиот четирицифрен број запишан со различни цифри и најголемиот трицифрен број со цифри помали од 8.

3661. Татко и син одлучиле да го одредат растојанието меѓу две дрва со чекори. За таа цел тргнале во исто време од исто дрво. Должината на чекорот на таткото изнесува $70cm$, а на синот $56cm$. Колку изнесува растојанието меѓу дрвата, ако чекорите на таткото и синот се совпаднале точно десет пати токму кога стигнале до второто дрво?

3662. Ходник во форма на правоаголник со димензии 15dm и 3m треба да се поплочи со правоаголни плочки чии димензии се 50cm и 20cm. Колку плочки се потребни за поплочувањето? (Дозволено е да се користат само цели плочки.)

3663. Должината на отсечката AB е за $2cm$ поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката CD се зголеми 3 пати, а должината на отсечката AB се зголеми за $10cm$, ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD?

4 – 5 **одделение**

3664. Еден ученик наместо да го помножи некој број со 506, го помножил со бројот 56, при што добил за 11250 помал производ. Кој број го множел ученикот?

3665. Јовче од дома до училиштето има $3km$ и $650m$. Тој чекори со чекор долг $50cm$. Колку чекори ќе направи до училиштето и назад до дома?

3666. Должината на страната на еден квадрат е четири пати поголема од должината на страната на друг квадрат. Нивните периметри се разликуваат за $36cm$. Определи ги должините на страните на двата квадрати!

3667. На отсечката $\overline{AB}=28cm$ означени се точките C и D така што отсечката CD е два пати поголема од отсечката AC, а отсечката DB е два пати поголема од отсечката CD. Пресметај го растојанието меѓу средишните точки на отсечките AC и DB.

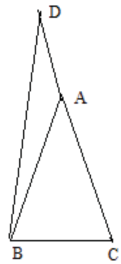
5 – 6 **одделение**

3668. Еден сточар на пазар однесол јаре, теле и овен. Јарето и овенот заедно имале $90kg$, јарето и телето $186kg$, а овенот и телето $240kg$. По колку килограми има секој од нив?

3669. Баба Маре испекла 121 костен за своите внуци. Таа им ги поделила костените, така што секој од нив добил еднаков број костени. Знаеме дека баба Маре има повеќе од еден, а помалку од 100 внуци.

А) Колку внуци имала баба Маре и по колку костени добил секој од нив?

Б) Колку биле момчиња, ако момчињата биле за еден повеќе од девојчиња?



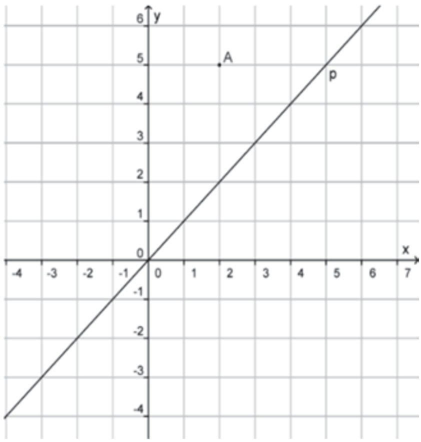
3670. Во рамнокрак триаголник $ABC\left(\overline{AB}=\overline{AC}\right)$ кракот AC е продолжен преку темето A до точка $D,$ така што периметарот на триаголникот BAD е $16cm$. Пресметај ја основата BC на триаголникот $ABC,$ ако периметарот на триаголникот BCD е $29cm$.

3671. Ако PQ и QR се отсечки нанесени на една права така што редоследот на точките е P, Q, R, и нека M е средината на отсечката PQ и N е средината на отсечката PR, при што Q е меѓу N и R, докажи дека $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{NM}$.

6 – 7 **одделение**

3672. За првенство во фудбал во едно училиште формирани се 10 екипи. Колку натпревари ќе се одиграат во текот на првенството, ако секоја екипа со секоја друга екипа ќе одигра 4 натпревари?

3673. Збирот на броителот и именителот на една дропка е 95. По скратување на дропката добиена е дропката $\frac{7}{12}$. Одреди ја таа дропка.



3674. За триаголникот ABC е познато дека темето A има координати (2,5), темето B е симетрично на темето A во однос на y – оската, а темето C е симетрично на темето B во однос на x – оската. Одреди ги координатите на темињата на B и C и изврши осна симетрија на триаголникот во однос на правата p.

3675. Миле се разбудил едно утро и видел дека неговиот единствен часовник престанал да работи бидејќи приклучувачот испаднал од штекерот. Миле немал друг часовник, телефон, телевизор, радио или било што од каде можел да дознае колку е часот. Неговиот пријател живеел на оддалеченост од $2\ km$ и само со одење можел да стигне кај него. Миле откако повторно го приклучил часовникот да работи на струја, отишол пеш до пријателот, се информирал за точното време и, без задржување се вратил дома со истата брзина на движење и ги коригирал стрелките на часовникот.
Како Миле направил часовникот да го покажува точното време?

3675. За триаголникот ABC е познато дека темето A има координати (2,5), темето B е симетрично на темето A во однос на *y* – оската, а темето C е симетрично на темето B во однос на *x* – оската. Одреди ги координатите на темињата на B и C и изврши осна симетрија на триаголникот во однос на правата p.

7 – 8 **одделение**

3676. Аритметичката средина на четири броеви изнесува 20. После додавањето на уште еден број, аритметичката средина на петте броеви ќе биде 18. Кој е додадениот број?

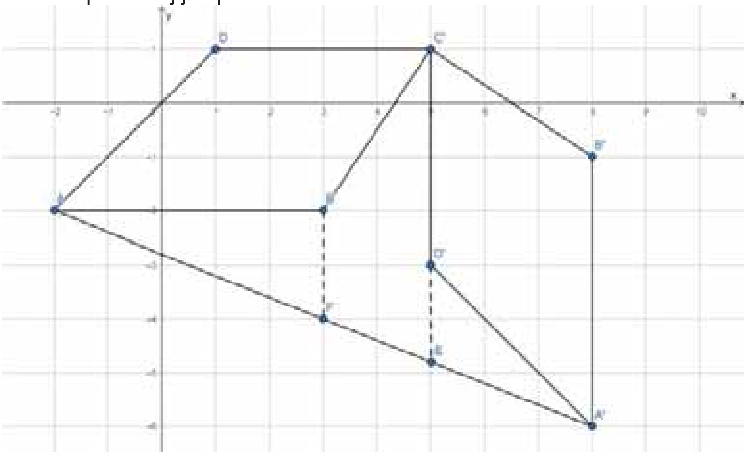
3677. Три сестри си поделиле одредена сума пари при што првата сестра зела $\frac{1}{5}$ од парите, втората сестра $\frac{5}{8}$ од парите, а остатокот го зела третата сестра. Но, потоа третата сестра ѝ дала на првата сестра $\frac{3}{4}$ од својот дел, а на втората сестра ѝ ги дала сите останати пари. Колкав дел од целата сума пари добила првата сестра?

3678. Разликата на периметрите на два квадрати е 24, а должините на страните на квадратите се однесуваат како 3:2. Пресметај ја плоштината на квадратите.

3679. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, на страната $\overline{AB}$ е дадена точка M, а на страната $\overline{AC}$ точка N така што $|BC| = |CM| = |MN| = |AN|$. Пресметај ги аглите на триаголник ABC.

8 – 9 **одделение**

3680. Во Декартов правоаголен координатен систем се дадени точките $A(-2,-2), B(3,-2), C(5,1), D(1,1)$. Четириаголникот $ABCD$ ротира околу темето C за агол од $90°$ во позитивна насока (спротивно од движењето на стрелките на часовникот), при што, како слика се добива четириаголникот $A'B'C'D'$. Пресметај ја приближно плоштината на петаголникот $AA'B'C'D$.



3681. Дропката $\frac{2019}{2020}$ да се претстави (ако тоа е можно) како збир од три позитивни дропки така што именителите на тие три дропки да се по парови заемно прости.
3682. Во текот на учебната година Коста правел неколку тестови по математика и на нив постигнал одреден број поени. Ако Коста на следниот тест по математика постигне 89 поени, тогаш неговиот просек на поени од тестови ќе биде 91. Но, ако на следниот тест постигне 64 поени, тогаш неговиот просек на поени од тестови по математика ќе биде 85. Колку тестови по математика направил Коста?
3683. Во ΔABC, $\overline{AC} = 5\ cm$ и $\overline{BC} = 9\ cm$. Од средината на страната AB е издигната нормала којашто страната BC ја сече во точката E. Точката E е поврзана со темето A. Пресметај го периметарот на ΔAEC.

9 **одделение**

3684. Ако во правоаголникот страните се однесуваат како $\sqrt{2}:1$, тогаш нормалите спуштени од две спротивни темиња врз дијагоналата ја делат дијагоналата на три еднакви дела. Докажи!
3685. Нека правата p паралелна со страната BC ги сече страните AB и AC на рамностраниот триаголник ABC во точките M и N, соодветно. Ако периметарот на триаголникот AMN е m и е еднаков со периметарот на трапезот $BCNM$ тогаш одреди го периметарот на триаголникот ABC.
3686. Марија и Милена замислиле по еден природен број. Ако бројот што го замислила Марија го намалиме за 15%, а бројот што го замислила Милена го зголемиме за 15% тогаш се добиват два еднакви броја. Познато е дека замислените броеви се најмалите природни броеви со тоа својство. Кои броеви ги замислиле Марија и Милена.
3687. Докажи дека, за секој цел број k, дропката $\frac{1+5^{k+1}\cdot 2^k}{1+5^k\cdot 2^{k+1}}$ е скратлива.

Трајче Ѓорѓијевски
Мирко Петрушевски

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ

1. Дали е можно да се распоредат броевите $1,2,\dots,81$ на 9×9 табла (по еден број во секое единечно квадратче од таблата) така што за секој реден број i, $1\le i\le9$, производот на броевите распоредени во i-тата редица е еднаков на производот на броевите распоредени во i-тата колона? (Одговорот да се образложи.)

2. Од таблицата броеви

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 \\ 9 & 0 & 1 & \cdots & 8 \\ 8 & 9 & 0 & \cdots & 7 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{array}$$

се избрани десет броеви така што никои два не се во иста линија (редица или колона од таблицата). Дали е можно сите избрани броеви да се меѓусебно различни? (Одговорот да се образложи.)

XXXVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ, 13.04.2019

IV **одделение**

1. Една верверичка во текот на првата недела собрала 84 ореви, во текот на втората недела 96 ореви, а во текот на третата недела 65 ореви. Друга верверичка во четвртата недела собрала трипати повеќе ореви, отколку првата верверичка во втората и третата недела заедно. Колку вкупно ореви собрале двете верверички во текот на четирите недели?

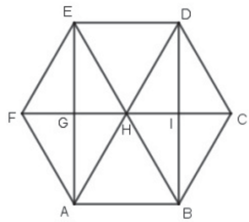
Решение. Првата верверичка собрала $84+96+65=245$ ореви во текот на трите недели. Втората верверичка во четвртата недела собрала вкупно $3\cdot(96+65)=3\cdot161=483$ ореви. Двете верверички заедно собрале $245+483=728$ ореви.

2. Во еден град на главната права улица се наоѓаат училиште, кино и пошта, во тој редослед. Од училиштето до поштата растојанието е $1km\,215m$, а растојанието меѓу училиштето и киното е за третина помало. Колкаво е растојанието од поштата до киното?

Решение. Растојанието од училиштето до поштата е $1215\,m$. Според условите на задачата добиваме дека растојанието меѓу поштата и киното е една третина од $1215\,m$ т.е. $1215:3=405\,m$.

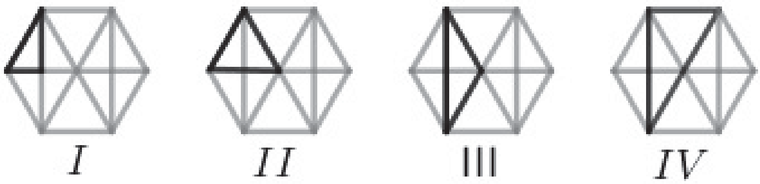
3. (**Нумерус** 44/1, **стр**. 33, **зад**. 3484) Определи го бројот и напиши ги сите триаголници на цртежот десно.

Решение. *Прв начин.* Бараните триаголници се:
ABH , BCH , BCI , BIH , CDH , ICD , HID , BCD , BDH , EDH , EFH , EFG , EGH , FAH , FAG , GAH , AEF , EAH , ABE , ABD , ADE , DEB .



На цртежот вкупно има 22 триаголници.

Втор начин. На цртежот има четири вида триаголници: I, II, III и IV вид, кои се прикажани со задебелени линии. Од I вид има 8 триаголници, од II вид има 6 триаголници, од III вид има 4 триаголници и од IV вид има 4 триаголници. Според тоа, вкупно има $8+6+4+4=22$ триаголници.



4. (**Нумерус** 44/2, **стр**.14, **зад**.3510) На отсечката AB избрана е точка C . Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC . Определи ги должините на отсечките AB и AC , ако должината на отсечката CB е $24\,cm$.

Решение. *Прв начин.* Ако отсечката AB ја поделиме на 4 еднакви дела, бидејќи таа е 4 пати подолга од отсечката AC , тоа значи дека отсечката AC е еден од четирите еднакви дела на отсечката AB . Тоа пак значи дека отсечката CB ги содржи останатите три дела од отсечката AB . Бидејќи должината на отсечката CB е $24\,cm$, значи дека еден од четирите дела на отсечката AB е долг $24:3=8\,cm$. Значи, отсечката AC е долга $8\,cm$. а отсечката AB е долга $8\cdot 4=32\,cm$.

Втор начин. Ако должината на отсечката AC ја обележиме со x , тогаш за должината на отсечката AB важи $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$, односно

$$x+24=4x$$
$$3x=24$$
$$x=8cm$$

Отсечката AB е долга $8\cdot 4=32\,cm$.

5. На 6 дрвја има 129 птици. Во еден момент одлетале 6 птици од првото дрво, 11 од второто, 8 од третото, 10 од четвртото, 7 од петтото и 9 од шестото. Тогаш на сите дрвја останале ист број на птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

Решение. Кога одлетале птиците од шесте дрвја останале

$$129-(6+11+8+10+7+9)=129-51=78.$$

На сите дрвја останале по ист број на птици, значи $78:6=13$. На секое дрво останале по 13 птици. На почетокот на првото дрво имало $13+6=19$ птици, на второто $13+11=24$, на третото $13+8=21$, на четвртото $13+10=23$, на петтото $13+7=20$ и на шестото дрво $13+9=22$.

V **одделение**

1. Во првата гајба има 1999 јаболка повеќе од втората гајба. Во која гајба ќе има повеќе јаболка и за колку, ако од првата гајба префрлиме 1000 јаболка во втората гајба.

Решение. Ако во втората гајба има x јаболка, тогаш во првата има $x+1999$. По префрлањето, во првата ќе има $x+999$, а во втората $x+1000$. Следува дека во втората има едно јаболко повеќе.

2. Една живинарска фарма испорачала 720 јајца. Спакувани биле во кутии по 6. При транспортот се искршиле 140 јајца. Останатите јајца биле пакувани во кутии по 12. Колку кутии јајца биле пакувани. Дали останале не скршени јајца кои не може да се пакуваат?

Решение: Од 720 јајца останале после транспортот $720-140=580$ јајца. Тие треба да се пакуваат во кутии по 12, значи би имале $580:12=48$ кутии а останале 4 јајца кои нема да можат да се пакуваат на овој начин.

3. Даден е квадрат со плоштина $36cm^2$. Да се определи должината на правоаголникот кој има ширина $3cm$ и ист периметар како и квадратот.

Решение. Плоштината на квадратот е $P=36cm^2$ од каде се добива дека страната на квадратот е $6cm$, а неговиот периметар е $L_k=4\cdot 6=24cm$. Тогаш, ако во равенката за периметар на правоаголник замениме $L_p=24cm$ и $b=3cm$, добиваме $L_p=2a+2b \Rightarrow 24=2a+2\cdot 3$, од каде што следи дека $2a=24-6 \Rightarrow 2a=18$, односно $a=9cm$.

4. (**Нумерус** 44/1, **стр.** 35, **зад.** 3490) Благоја учествувал во лотарија во која секоја срећка е означена со некој трицифрен број. Тој ги купил сите срећки означени со броевите чиј производ на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, а збирот на тие две цифри за 1 се разликува од цифрата на стотките. Колку срећки и со кои броеви купил Благоја?

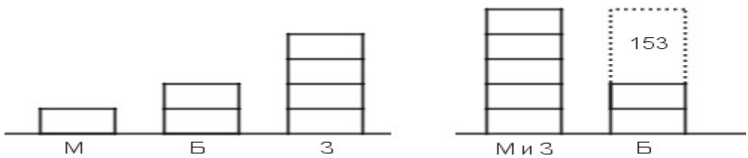
Решение. Нека со D ја означиме цифрата на десетките и со E цифрата на единиците. Според условот на задачата производот на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, па затоа можни парови (D,E) се: $(6,2)$, $(2,6)$, $(3,4)$ и $(4,3)$.

Збирот $D+E$ на првите два пара е 8, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 7 или 9. Според тоа, Благоја ги купил срећките со броевите 726, 762, 926 и 962. Збирот $D+E$ на вторите два пара е 7, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 6 или 8. Според тоа, Благоја ги купил срећките со броевите 634, 643, 834 и 843.

Бидејќи ги купил сите срећки означени со броеви со дадените својства, Благоја вкупно купил 8 срећки.

5. (**Нумерус** 44/1, **стр**. 35, **зад.**3491) Марио, Бојан и Златко имаат определен број на сликички. Бојан има двапати повеќе сликички од Марио, а Златко има двапати повеќе сликички од Бојан. Златко и Марио заедно имаат 153 сликички повеќе од Бојан. Колку сликички има секој од нив?

Решение. Ако бројот на сликичките на Марио го означиме со еден правоаголник, тогаш бројот на сликичките на Бојан е означен со 2, а на Златко со 4 правоаголници. Значи, бројот на сликичките кои заедно ги имаат Марио и Златко е означен со 5 правоаголници, па затоа на 1 правоаголник му соодветствува бројот $153:3=51$. Според тоа, Марио има 51 сликичка, Бојан има $2\cdot 51=102$ сликички и Златко има $4\cdot 51=204$ сликички.



VI **одделение**

1. Во една продавница има 800 тетратки и таа работи од понеделник до петок. Во една недела биле продадени сите тетратки така што секој ден биле продадени по 40 тетратки повеќе од претходниот ден. По колку тетратки биле продадени секој ден од таа недела?

Решение. Нека во понеделник биле продадени x тетратки, во вторник $x+40$, среда $x+80$, четврток $x+120$ и петок $x+160$. Ако биле продадени сите тетратки би имале дека

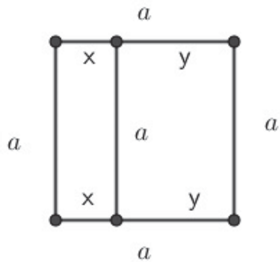
$$x+x+40+x+80+x+120+x+160=800,$$
$$5x+400=800,$$
$$x=80$$

Значи, во понеделник биле продадени 80 тетратки, во вторник 120, среда 160, четврток 200 и петок 240.

2. Квадрат е исечен на два правоаголници. Збирот на периметрите на двата правоаголници е за $210cm$ поголем од периметарот на квадратот. Плоштината на едниот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на другиот правоаголник. Пресметај го периметарот на помалиот правоаголник.

Решение. Бидејќи збирот на периметрите на правоаголниците е за две должини на страната на квадратот поголем од периметарот на квадратот, следува дека

$$a = 210 : 2 = 105cm .$$



Од друга страна, плоштината на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на помалиот, а и двата имаат една иста страна (страната на квадратот), па затоа втората страна на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од втората страна на помалиот, т.е. $y = 4x.$ Од $x + y = a = 105,$ следува $x = 21cm.$ Следува дека периметарот на помалиот правоаголник изнесува $2 \cdot (105 + 21) = 252cm.$

3. Од некоја сума прво се одбиени 5% за трошоци, потоа 90 денари за заеднички потреби, а остатокот е поделен на три лица подеднакво. Колку изнесува целата сума ако секое лице добило по 160 денари?

Решение. Ако секое лице добило по 160 денари, значи пред поделбата имало $160 \cdot 3 = 480$ денари. Ако на оваа сума се додадат 90 денари, се добива сума од 570 денари. Бидејќи 5% се одбиени од целата сума, тоа значи дека 570 е 95% од целата сума. Значи, почетната сума е $570 \cdot 100 : 95 = 600$ денари.

4. (**Нумерус** 43/3, **стр.** 30, **зад.** 3446) Определи ги природните броеви a и b за кои важи $a < b$, $ab = 13824$ и $\text{НЗД}(a,b) = 24$.

Решение. Од $\text{НЗД}(a,b) = 24$ следува дека $a = 24x$ и $b = 24y$, каде $\text{НЗД}(x, y) = 1$. Понатаму, заменуваме во $ab = 13824$ и добиваме $24x \cdot 24y = 13824$, т.е. $xy = 24$, каде $\text{НЗД}(x, y) = 1$. Но, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ и како $a < b$ имаме $x < y$, па затоа од $\text{НЗД}(x, y) = 1$ и $xy = 24$ следува $x = 1$, $y = 24$ или $x = 3$, $y = 8$. Конечно, бараните броеви се $a = 24$, $b = 576$ или $a = 72$, $b = 192$.

5. (**Нумерус** 44/1, **стр.** 37, **зад.** 3494) Елена и Десанка заедно располагаат со шест монети од по 50 денари и 4 банкноти од по 100 денари. На колку начини може подеднакво да ги поделат парите?

Решение. Елена и Десанка заедно имаат $6 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 700$ денари, па така секоја од нив треба да добие по $700 : 2 = 350$ денари. Нека x е бројот на монети од по 50 денари, а y е бројот на банкнотите од по 100 денари кои ги добила Елена. Притоа важи $50x + 100y = 350,$ односно $x + 2y = 7,$ каде

$$x \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \text{ и } y \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Од $x+2y=7,$ заклучуваме дека x е непарен број, т.е. $x \in \{1,3,5\}.$

Ако $x=1$, тогаш $y=(7-1):2=3,$ што значи дека Елена добила 1 монета од по 50 денари и 3 банкноти од по 100 денари.

Ако $x=3$, тогаш $y=(7-3):2=2,$ што значи дека Елена добила 3 монети од по 50 денари и 2 банкноти од по 100 денари.

Ако x=5, тогаш $y=(7-5):2=1,$ што значи дека Елена добила 5 монети од по 50 денари и 1 банкнота од по 100 денари.

Елена и Десанка парите може да ги поделат на трите опишани начини.

VII **одделение**

1. Кои собироци треба да се изоставаат во изразот

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12},$$

за да вредноста на новиот збир биде 1?

Решение. Бидејќи

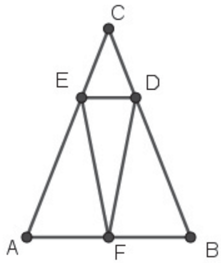
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}=\frac{147}{120} \text{ и } \frac{120}{120}=1$$

треба да избришеме собироци кои даваат збир $\frac{147}{120}-\frac{120}{120}=\frac{27}{120}$. Значи, треба да ги избришеме собироците $\frac{15}{120}$ и $\frac{12}{120}$, односно собироците $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{10}$.

2. (**Нумерус** 44/2, **стр.** 19, **зад.** 3520) Секогаш кога ќе исполни желба на сопственикот должината на правоагониот волшебен килим се намалува за $\frac{1}{2}$ од постојаната должина, а ширината се намалува за $\frac{1}{3}$ од постојаната ширина. По три исполнети желби килимот имал плоштина $18\,dm^2$. Почетната ширина на килимот била $1,8\,m$. Определи ја почетната должина на килимот. Определи ја почетната плоштина на килимот.

Решение. Нека x е почетната должина на килимот. Почетната ширина на килимот е $1,8\,m=18\,dm$. По исполнувањето на првата желба должината на килимот е $\frac{1}{2}x,$ а ширината е $18-\frac{1}{3}\cdot 18=12dm.$ По исполнувањето на втората желба должината на килимот е $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x,$ а ширината е $12-\frac{1}{3}\cdot 12=8dm.$

По исполнувањето на третата желба должината на килимот е $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x,$ а ширината е $8-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}dm.$ Сега за плоштината на килимот добиваме $\frac{1}{8}x\cdot\frac{16}{3}=18,$ од каде наоѓаме $x=27dm=2,7m.$ Конечно почетната плоштина на килимот е $P=2,7\cdot 1,8=4,86m^2$.



3. (**Нумерус** 44/1, **стр**.38, **зад.** 3498). Даден е рамнокрак ΔABC. На краците AC и BC на ΔABC се земени точки E и D, соодветно, такви што $\overline{CE}=\overline{CD}$, а точката F е средина на основата AB. Докажи дека ΔEDF е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\overline{EA}=\overline{CA}-\overline{CE}=\overline{CB}-\overline{CD}=\overline{DB}$, $\angle EAF=\angle DBF$ (агли при основата на рамнокракиот ΔABC) и $\overline{AF}=\overline{FB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ (точката F е средина на страната AB), од признакот САС следува дека $\Delta AEF\cong\Delta BDF$. Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{EF}=\overline{DF}$, што значи дека ΔEDF е рамнокрак.

4. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ за кој важи

$$\overline{xyzt}+4\cdot\overline{yzt}+2\cdot\overline{zt}=2018.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\overline{xyzt}+4\cdot\overline{yzt}+2\cdot\overline{zt}=2018$$

$$(1000x+100y+10z+t)+4\cdot(100y+10z+t)+2\cdot(10z+t)=2018$$

$$1000x+500y+70z+7t=2018$$

Цифрата на единиците на првите три собироци во последното равенство е 0, па за да цифрата на единиците на збирот е 8, потребно е цифрата на единиците на производот $7t$ да е 8. Единствена можност е $t=4$, што значи дека равенството го добива обликот $1000x+500y+70z=1990$, односно $100x+50y+7z=199$. Цифрата на единиците на првите два собирка е 0, па за цифрата на единиците на збирот е 9, единствена можност е $z=7$, т.е.

$100x+50y=150$. Конечно, бидејќи бараниот број е четирицифрен од последното равенство следува $x=y=1$ и затоа $\overline{xyzt}=1174$.

5. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен природен број е запишан во декаден запис само со цифрата 2. Одреди ги тие броеви .

Решение. Производот на еден двоцифрен и еден троцифрен број е поголем од $10\cdot 100=1000$, а помал од $100\cdot 1000=100000$, па производот е еден од броевите 2222 или 22222. Ако производот е бројот $2222 = 2\cdot 11\cdot 101$, тогаш можни се случаите $11\cdot 202$ или $22\cdot 101$. Ако производот е бројот $22222=2\cdot 41\cdot 271$, тогаш можни се случаите $41\cdot 542$ или $82\cdot 271$.

VIII **одделение**

1. Телефонскиот број на Ѓурѓа се состои од два трицифрени броја. Секој од нив е делив со 45, а средната цифра им е 8. Одреди го телефонскиот број, ако првиот дел од бројот е помал од вториот.

Решение. Нека бараниот телефонски број е $\overline{a8bc8d}$. Ако секој број $\overline{a8b}$ и $\overline{c8d}$ е делив со 45, тогаш тие мора да се деливи со 5 и 9. Следува последната цифра е 5 или 0. Ако последната цифра е 5, тогаш и првата цифра мора да е 5, бидејќи само 585 е делив со 9. Ако последната цифра е 0, тогаш првата цифра е 1. Бидејќи првиот број е помал, бараниот број е $180\ 585$

2. (**Нумерус** 43/3, **стр.** 32, **зад.** 3452) Во една дропка именителот е за три поголем од броителот. Ако броителот на оваа дропка го зголемиме за 2, а именителот го зголемиме трипати, тогаш збирот на така добиената дропка и почетната дропка е еднаков на 1. Определија почетната дропка.

Решение. Нека x е броителот на почетната дропка. Тогаш $x+3$ е нејзиниот именител, а $\frac{x}{x+3}$ е почетната дропка. После зголемувањето на броителот и именителот ја дибиваме дропката $\frac{x+2}{3(x+3)}$. Според тоа, $\frac{x}{x+3}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1.$

Ако првата дропка ја прошириме со 3 и ги собереме добиените дропки последователно добиваме

$$\frac{3x}{3(x+3)}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1$$

$$\frac{4x+2}{3(x+3)}=1$$

$$4x+2=3x+9$$

$$x=7.$$

Според тоа, почетната дропка е $\frac{x}{x+3}=\frac{7}{10}.$

3. Страната на правилен многуаголник е со должина $1cm$. Колкав е периметарот на овој правилен многуаголник, ако тој има 252 дијагонали?

Решение. Нека правилниот многуаголник има *n* страни. Тогаш бројот на неговите дијагонали е $\frac{n(n-3)}{2}=252,$ односно

$$n(n-3)=2^3\cdot 3^2\cdot 7=24\cdot 21.$$

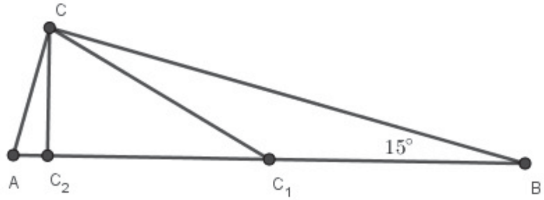
Следува дека $n=24,$ а периметарот изнесува $24cm.$

4. (**Нумерус** 44/1, **стр.** 46, **зад.** 295) Еден базен се полни со една цевка. Ако дотокот на водата во базенот се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми времето на полнење на базенот?

Решение. Нека за 1 час од цевката на базенот истекуваа a литри вода и нека базенот се полни x часови. Тогаш волуменот на базенот е $V=ax$ литри. Ако дотокот на водата се намали за 20%, тогаш во базенот за 1 час ќе истекуваат $0,8a$ литри. Ако y е времето потребно за да во овој случај се наполни базенот, тогаш за волуменот на базенот имаме $V=0,8ay$. Според тоа, $ax=0,8ay,$ од каде добиваме $10x=8y,$ односно $y=1,25x=x+0,25x,$ што значи дека со намален доток на вода за 20%, времето на полнење на базенот ќе се зголеми за 25%.

5. Нека е даден правоаголен ΔABC со прав агол во темето C и аголот во темето B е 15°. Ако $\overline{AB}=20cm$ да се пресмета плоштината на ΔABC.

Решение. Нека CC_1 е тежишна линија во ΔABC, а CC_2 е висина. Тогаш ΔCC_1B и ΔACC_1 се рамнокраки триаголници, со агли при основа од 15° и 75°, соодветно. Од $\angle ACC_2=15^\circ$ и $\angle ACC_1=75^\circ$ следува $\angle C_2CC_1=60^\circ$ т.е. $\angle CC_1C_2=30^\circ$. Триаголникот CC_1C_2 е правоаголен и CC_2 е катета спроти аголот од 30°, па е половина од хипотенузатата, т.е. $\overline{CC_2}=\frac{\overline{CC_1}}{2}=5cm.$



Следува $P_{\Delta AC_1C}=\frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{CC_2}}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25cm^2.$

Конечно, $P_{\Delta ABC} = 2P_{\Delta AC_1C} = 50cm^2$.

IX **одделение**

1. Три девојки Ана, Маја и Александра, во шумата набрале 770 јаготки и одлучиле меѓусебно да ги поделат пропорционално со бројот на своите години. Секогаш кога Маја земала 4 јаготки, Ана земала по 3 јаготки, а на секои 6 јаготки кои ги земала Маја, Александра земала по 7 јаготки. Колку години има секоја од девојките, ако е познато дека тие заедно имаат 35 години? По колку јаготки добила секоја од нив?

Решение. Годините на Ана, Маја и Александра да ги означиме со x, y и z, соодветно. Од условот на задачата имаме:

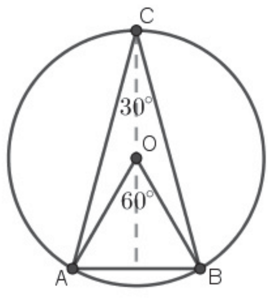
$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ y:x=4:3 \\ y:z=6:7. \end{cases}$$

Следува $x=\frac{3}{4}y$ и $z=\frac{7}{6}y$, па со замена во $x+y+z=35$, имаме дека $x=9,\quad y=12$ и $z=14$. Бидејќи $770:35=22$, добиваме дека Ана добила $9\cdot 22=198$ јаготки, Маја добила $12\cdot 22=264$ јаготки и Александра добила $22\cdot 14=308$ јаготки.

2. (**Нумерус** 44/2, **стр.** 28, **зад.** 309) Ако p е прост број поголем или еднаков на 3, тогаш 12 е делител на p^2+11. Докажи!

Решение. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $p=6k\pm 1,\quad k\in \mathbb{N}$. Според тоа, $p^2+11=(6k\pm 1)^2+11=36k^2\pm 12k+1+11=12(3k^2\pm k+1),$ што значи дека $12\,|\,p^2+11$.

3. (**Нумерус** 44/2, **стр.** 28, **зад.** 308) Во круг со радиус $r=12cm$ е впишан рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот еднаков на 30°. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

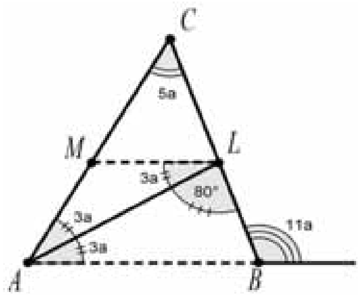


Решение. Бидејќи аголот при врвот на рамнокракиот триаголник ABC е еднаков на 30°, следува дека централниот агол $\angle AOB$ е еднаков на 60°. Според тоа, триаголникот AOB е рамностран, па затоа $\overline{AB}=12\,cm.$ Висината на триаголникот ABC е еднаква на збирот на висината на триаголникот AOB и радиусот на опишаната кружница.

Значи, $h_c = \overline{OC} + \frac{\overline{OB}\sqrt{3}}{2} = 12 + 6\sqrt{3} = 6(2+\sqrt{3})cm.$

Од Питагоровата теорема следува дека $\overline{AC} = \overline{BC} = 12\sqrt{2+\sqrt{3}}cm.$ Според тоа, периметарот на триаголникот е еднаков на $24\sqrt{2+\sqrt{3}}+12cm,$ а плоштината е еднаква на $36(2+\sqrt{3})cm^2$.

4. Даден е ΔABC со симетрала на аголот при темето A, AL $(L \in BC)$. Точката $M \in AC$ е таква што $ML \parallel AB$.



Нека β' е надворешниот агол при темето B на ΔABC и $\angle ACB : \beta' = 5:11.$

а) Определи го односот $\angle CAB : \angle ACB$.

б) Ако $\angle ALB = 80^\circ$, определи го $\angle ALM$.

Решение. а) Според условот на задачата имаме $\angle ACB = 5a$ и $\beta' = 11a$, па затоа $\angle BAC + 5a = 11a$, односно $\angle BAC = 6a$. Според тоа,

$$\angle CAB : \angle ACB = 6a : 5a = 6:5.$$

б) Од условот на задачата следува:

$\angle BAL = \angle LAM = 3a$ (симетрала на аголот при темето A),

$\angle BAL = \angle ALM = 3a$. (пар наизменични агли),

$\angle ALB = \angle LAC + \angle ACL$ (надворешен агол за ΔALC).

Значи, $80^\circ = 3a + 5a$, па затоа $a = 10^\circ$ и $\angle ALM = 3a = 30^\circ$.

5. Ако $x = 10^{2019}$, тогаш 54 е делител на $x^2 + x - 2$. Докажи!

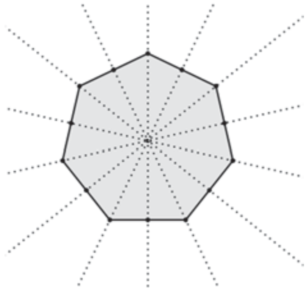
Решение. Го трансформираме изразот $x^2 + x - 2$ и добиваме:

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = \left(1\underbrace{000...0}_{2019} - 1\right)\left(1\underbrace{000...0}_{2019} + 2\right) = \underbrace{999...9}_{2019} \cdot 1\underbrace{000...0}_{2018}2.$$

Првиот множител е делив со 9, а вториот со 6, од каде следува дека 54 е делител на $x^2 + x - 2$ кога $x = 10^{2019}$.

РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLV-2

4 **одделение**



3632. Во еден многуаголник со еднакви страни и еднакви агли, од едно теме можат да се повлечат 4 дијагонали. Колку страни и колку оски на симетрија има тој многуаголник?

Решение: Од едно теме во *n*-аголник може да се повлечат толку дијагонали, колку што има несоседни темиња, односно *n*-3 (ги исклучуваме самото теме и неговите две соседни темиња). Многуаголникот во кој од едно теме може да се повлечат 4 дијагонали има вкупно седум темиња, т.е. е седумаголник.

Седумаголникот е правилен, па тој има 7 оски на симетрија.

3633. Имаме на располагање конец со должина $\frac{1}{5}m$ и конец со поголема должина од дадената. Како без користење на метро би можеле да добиеме конец долг $3dm$?

Решение: Со помош на конецот долг $\frac{1}{5}m = 2dm$, од другиот конец ќе отсечеме конец со иста должина и потоа ќе го пресечеме на половина. Секој од добиените делови ќе биде долг $\frac{1}{10}m = 1dm$. Кога ќе ги спомиме конецот долг $\frac{1}{5}m = 2dm$ и конецот долг $\frac{1}{10}m = 1dm$ ќе добиеме должина од $3dm$.

3634. Дадени се квадрат со страна x cm и рамностран триаголник со страна y cm. Одреди ги целобројните вредности за страните x и y, ако збирот на сите страни на квадратот и рамностраниот триаголник изнесува 78.

Решение: Според условот на задачата за страните важи следното равенство $4 \cdot x + 3 \cdot y = 78$, од каде $y = (78 - 4 \cdot x): 3$.

Решенијата ќе ги добиеме од следнава табела:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = (78 - 4 \cdot x): 3$	/	/	22	/	/	18	/	/	14	/

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$y = (78 - 4 \cdot x): 3$	/	10	/	/	6	/	/	2	/

Должините на страните се: $x = 3$ и $y = 22$ или $x = 6$ и $y = 18$ или $x = 9$ и $y = 14$ или $x = 12$ и $y = 10$ или $x = 15$ и $y = 6$ или $x = 18$ и $y = 2$.

3635. На мравката и слонот да поминат ист пат, вкупно им треба 26 години. Ако на слонот му треба онолку месеци колку на мравката години, одреди за колку години слонот и за колку години мравката ќе го поминат предвидениот пат.

Решение: Нека времето за кое слонот ќе го помине патот е x месеци, тогаш времето за кое мравката ќе го помине патот е x години, а тоа е $12 \cdot x$ месеци. Значи, вкупниот број месеци што им требаат на мравката и слонот да го поминат патот е $x + 12 \cdot x = 13 \cdot x$. Бидејќи 26 години се $26 \cdot 12 = 936$ месеци, ќе имаме $13 \cdot x = 936$, од каде $x = 24$. Заради тоа на слонот му требаат 24 месеци, односно 2 години, а на мравката 24 години да го поминат предвидениот пат.

4-5 **одделение**

3636. Андријана, Бојана, Соња и Драгана стојат на една празна улица по тој редослед. Познато е дека растојанието од Бојана до Соња изнесува една третина од растојанието од Андријана до Соња, а една четвртина од растојанието од Бојана до Драгана. Ако Бојана е оддалечена од Соња на 12 метри, тогаш на кое растојание е Андријана до Драгана?

Решение. Бидејќи растојанието од Бојана до Соња е 12 метри, тогаш растојанието од Андријана до Соња е три пати поголемо и изнесува 36 метри. Слично растојанието од Бојана до Драгана е четирипати поголемо и изнесува 48 метри. Тогаш, растојанието од Андријана до Бојана е 36 – 12 = 24 метри, а растојанието од Соња до Драгана е 48 – 12 = 36 m. Конечно, растојанието од Андријана до Драгана е 24 +12 + 36 = 72 m.

3637. Марко му рекол на Дарко да го пресмета збирот на сите различни четирицифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4 така што во ниту еден број ниту една цифра не се повторува. Дарко му рекол на Марко да го пресмета збирот на сите четирицифрени броеви запишани со исти цифри само со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4 и добиениот број да го помножи со бројот 6. Кој од нив двајца добил поголем број?

Решение. Дарко ги запишал сите четирицифрени броеви запишани со цифрите 1, 2, 3 и 4, така што во ниту еден број ниту една цифра не се повторува. Има вкупно 24 такви броја:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

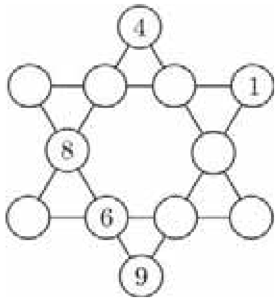
Забележуваме дека цифрата 1 ја има како цифра на единици во 6 различни броеви, како цифра на десетки во други 6 различни броеви, итн. Секоја цифра го има истото својство, па затоа збирот на овие броеви е:

$$6 \cdot 1111 + 6 \cdot 2222 + 6 \cdot 3333 + 6 \cdot 4444 = 6 \cdot 11110 = 66660.$$

Но, истиот резултат го добил и Марко кој пресметувал

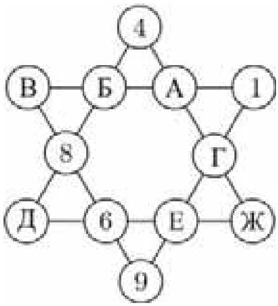
$$(1111 + 2222 + 3333 + 4444) \cdot 6 = 11110 \cdot 6 = 66660.$$

Значи, Дарко и Марко добиле ист број.



3638. Во кружчињата на цртежот треба да се распоредат сите броеви од 1 до 12 така што збирот на сите четири броеви поставени по должината на секоја од шесте прави е ист.

Решение. Од цртежот се гледа дека секој број учествува во вкупниот збир по два пати, бидејќи секои две прави се сечат во точно едно кружче. Според тоа вкупниот збир е двојно поголем од вредноста на 1+2+3+...+12=78 т.е. вкупниот збир е 2 · 78 = 156, а на една од шесте прави збирот е 156 : 6 = 26.



Да ги означиме празните кружчиња со буквите А, Б, В, Г, Д, Е и Ж.

Значи В=26-(8+6+9)=3. Тогаш А+Б=26-(1+3)=22. Ова е можно само ако А и Б се 10 и 12. Ако земеме дека Б=10, тогаш Д=26-(4+10+8)=4 што не е можно затоа што бројот 4 е веќе искористен. Според тоа Б=12, А=10, па имаме Д=2. Останаа уште 3 букви и три броеви 5,7 и 11. Ако Г=11, тогаш Ж=26-(11+10+4)=1 што не е можно, значи мора Е=11, од каде Ж=26-(11+6+2)=7 и Г=5.

3639. На различна буква одговара различна цифра. Замени ги буквите со цифри така што е исполнето

$$\begin{array}{cccccccc} & \text{Н} & \text{У} & \text{М} & \text{Е} & \text{Р} & \text{У} & \text{С} \\ & & & \text{М} & \text{Е} & \text{Р} & \text{У} & \text{С} \\ & & & & & \text{Р} & \text{У} & \text{С} \\ + & & & & & & & \text{С} \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 9 & \text{Р} & 8 & 8 \end{array}$$

Решение. С може да е 7 или 2. Ако е С=2, тогаш У+У+У=8 или У+У+У=18, што не е можно, затоа што У треба да биде цифра и У не може да биде еднакво на 3. Значи, $C=7$. Сега У+У+У+2 треба да завршува на 8, а тоа е можно за У=2. Бидејќи Р+Р+Р завршува на Р следува дека Р=5. Заради 1+Е+Е=9, добиваме дека Е=4. Јасно е дека М=3 и Н=1.

5-6 одделение

3640. Производот на три природни броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви?

Решение: Од условот на задачата следува дека

$a\cdot b\cdot c=240,\;\; a\cdot b=60,\;\; a\cdot c=24$.

Тогаш од $(a\cdot b)\cdot c=240$ и $a\cdot b=60$, имаме $60\cdot c=240$, односно $c=4$.

Заради $a\cdot c=24$ добиваме дека $a=6$.

Тогаш, од $a\cdot b=60$ добиваме дека $b=10$.

Значи, бараните броеви се $6,\ 10,\ 4$.

3641. На која цифра завршува производот

$$9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\ ?$$

Решение:

$$9\cdot9=9^2=81$$

$$9\cdot9\cdot9=9^3=729$$

$$9\cdot9\cdot9\cdot9=9^4=6561$$

$$9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=9^5=59049$$

Од овие производи може да се заклучи дека бројот 9 помножен сам со себе парен број пати (степен на 9 со парен степенов показател) завршува на цифрата 1, а 9 помножен сам со себе непарен број пати (степен на 9 со непарен степенов показател) завршува на цифрата 9.

Според тоа $9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=9^9$ завршува на цифрата 9.

3642. Периметарот на еден правоаголник е $48\,cm$. Неговата ширина е три пати покуса од должината. Одреди ја плоштината на правоаголникот.

Решение:

Периметарот на правоаголник е $L=2a+2b=48\,cm$.

Неговата ширина ќе ја означиме со b, а должината со a.

Тогаш важи $a=3b$.

Заменувајќи во формулата за периметарот имаме:

$$2\cdot3b+2b=48$$

$$6b+2b=48$$

$$8b=48$$

$$b=\frac{48}{8}$$

$$b=6\,cm$$

Должината на правоаголникот е $a = 3 \cdot 6 = 18\,cm$.

Па, плоштината на правоаголниот ќе биде:

$$P = a \cdot b = 18 \cdot 6 = 108\,cm^2.$$

3643. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

Решение: При конструкцијата, над секоја страна на рамностраниот триаголник конструираме рамностран триаголник со страна еднаква на должината на страната на дадениот триаголник, па така триаголниците над страните на дадениот триаголник имаат плоштина еднаква на плоштината на дадениот триаголник.

Плоштината на добиената фигура е четири пати поголема од плоштината на рамностраниот триаголник т.е. $P = 4 \cdot 6 = 24\,cm^2$.

6-7 **одделение**

3644. Пет овци за 8 дена јадат $120\,kg$ сено. Колку сено е потребно за 80 овци за 15 дена?

Решение: Ако

5 овци за 8 дена јадат $120\,kg$ сено, тогаш

1 овца за 8 дена јаде $120:5 = 24\,kg$ сено.

1 овца за 1 ден јаде $24:8 = 3\,kg$.

80 овци за 1 ден јадат $3 \cdot 80 = 240\,kg$ сено,

80 овци за 15 дена ќе изедат $15 \cdot 240 = 3600\,kg$ сено.

3645. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9. Ако бројот 1 200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Колку е количникот при делење на бројот 860 со тој број, а колку е количникот при делење на бројот 1 200 со тој број?

Решение:

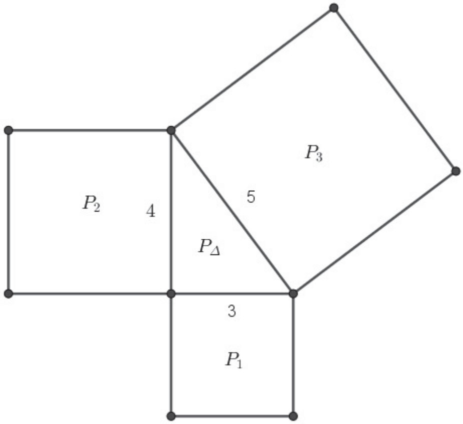
Нека x е бројот со кој се делат броевите 860 и 1 200, и нека k_1е количникот кој се добива при делење на 860 со x, а k_2 е количникот при делење на 1 200 со x.

Тогаш имаме:

860 = $x \cdot k_1 + 9$	1200 = $x \cdot k_2 + 16$
$x \cdot k_1$ =860 - 9	$x \cdot k_2$ = 1200 - 16
$x \cdot k_1$=851	$x \cdot k_2$ = 1184
851 = 37 · 23	1184 = 37 · 32

Количникот при делење на 860 со 37 е 23, а количникот при делење на 1200 со 37 е 32.

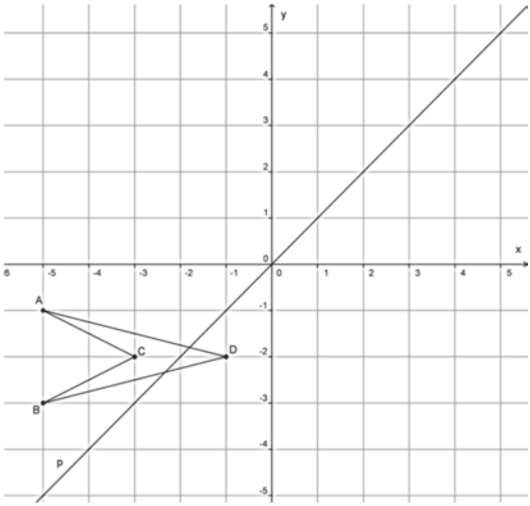
3646. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е $12dm$. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.
Решение:



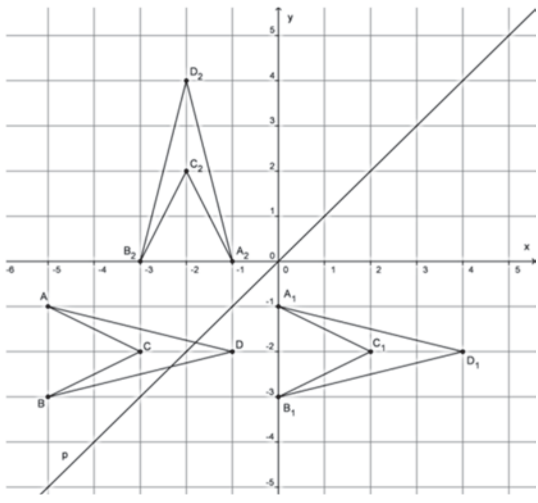
Страните на триаголникот се последователни броеви и ги означуваме со $x-1$, x и $x+1$. Тогаш од периметарот на триаголникот е $12dm$, добиваме $x-1+x+x+1=12\,dm$, од каде со решавање на равенката имаме $3x=12\,dm$, т.е. $x=4\,dm$. Следува дека страните на триаголникот имаат должини $3\,dm$, $4\,dm$ и $5\,dm$. Плоштината на правоаголниот триаголникот е половина од плоштината на правоаголникот со страни $3\,dm$ и $4\,dm$, односно $P_\Delta=\dfrac{3\cdot 4}{2}dm^2=6\,dm^2$, а плоштините на квадратите се: $P_1=3\cdot 3\,dm^2=9\,dm^2$, $P_2=4\cdot 4\,dm^2=16\,dm^2$ и $P_3=5\cdot 5\,dm^2=25\,dm^2$. Плоштината на добиената фигура е

$$P=P_1+P_2+P_3+P_\Delta=9+16+25+6=56\,dm^2.$$

3647. На цртежот е даден четириаголникот $ABCD$. Четириаголникот $ABCD$ транслатирај го за 5 единици надесно, а потоа добиениот четириаголник пресликај го со осна симетрија во однос на правата p. Кои се координатите на четириаголникот добиен по транслацијата и на четириаголникот добиен по осната симетрија? Што заклучуваш за добиените координати?



Решение:



Координатите на четириаголникот добиен по транслацијата се: $A_1(0,-1)$, $B_1(0,-3)$, $C_1(2,-2)$ и $D_1(4,-2)$.

Координати на четириаголникот добиени по осната симетрија на четириаголникот добиен со транслација се:
$A_2(-1,0)$, $B_2(-3,0)$, $C_2(-2,2)$ и $D_2(-2,4)$.

Координатите на темињата на четириаголникот A_2, B_2, C_2 и D_2 се добиваат ако координатите на темињата на четириаголникот A_1, B_1, C_1 и D_1 си ги заменат местата, т.е. секоја прва координата станува втора и обратно.

7-8 **одделение**

3648. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 денари поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 денари. Колку чинеле патиките, а колку тренерката пред намалувањето?

Решение:

Нека цената на патиките пред намалувањето била p денари. Тогаш цената на тренерката пред намалувањето била $p+900$ денари. После намалувањето важи:

$$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}(p+900)=5480.$$

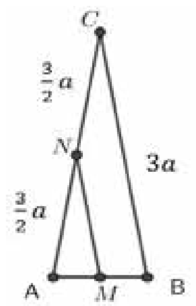
Со решавање на оваа равенка добиваме дека $p=2500$, односно пред намалувањето патиките чинеле 2500 денари, а тренерката $2500+900=3400$ денари.

3649. Целите броеви x, y и z при делење со бројот 7 даваат остаток 4, 5 и 6 соодветно. Докажи дека бројот $A=4x+5y+6z$ е делив со 7.

Решение: Броевите x, y и z може да ги запишеме како $x=7k+4$, $y=7m+5$ и $z=7n+6$, каде што k, m и n се цели броеви. Со замена во бројот A добиваме:

$$A=4x+5y+6z=4(7k+4)+5(7m+5)+6(7n+6)=$$
$$=7(4k+5m+6n)+(16+25+36)=7(4k+5m+6n)+77=$$
$$=77(4k+5m+6n+11)$$

Следува дека $7\,|\,A$.



3650. Рамнокракиот триаголник ΔABC со основа AB има крак 3 пати подолг од основата. Ако M е средина на основата, а N средина на кракот AC, тогаш периметарот на четириаголникот $BCMN$ е за $36cm$ поголем од периметарот на триаголникот ΔMNA. Колку е периметарот на триаголникот ΔABC ?

Решение: Од

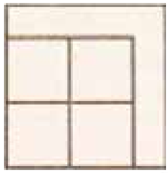
$$L_{BCMN}=\frac{a}{2}+3a+\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}a=\frac{a}{2}+6a,$$

$$L_{\Delta MNA}=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}a=\frac{a}{2}+3a \text{ и}$$

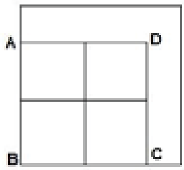
$$L_{BCMN}=L_{\Delta MNA}+36\,cm$$

следува $a=12\,cm$, а кракот има должина $3\cdot 12\,cm=36\,cm$. Следува дека периметарот на триаголникот е

$$L_{\Delta ABC}=12+36+36=84\,cm.$$



3651. Плоштината на големиот квадрат на сликата е $64\,cm^2$. Квадратот е поделен на пет дела, четири квадрати и еден многуаголник, со еднакви плоштини. Колку изнесува периметарот на многуаголникот?



Решение: Страната на големиот квадрат е $8\,cm$. Периметарот на многуаголникот е еднаков на периметарот на големиот квадрат бидејќи $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\overline{BC}=\overline{CD}$. Следува периматарот на многуаголникот е $32\,cm$.

8-9 **одделение**

3652. Пресметај $\dfrac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0,015^7$.

Решение:

$$\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0,015^7=\frac{2^3\cdot\left(2^2\right)^5\cdot(2\cdot 3)^7}{\left(2^3\right)^9\cdot 10^{11}}:\left(\frac{15}{1000}\right)^7=$$

$$=\frac{2^3\cdot 2^{10}\cdot 2^7\cdot 3^7}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\left(\frac{10^3}{3\cdot 5}\right)^7=\frac{2^{20}\cdot 3^7}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\frac{10^{21}}{3^7\cdot 5^7}=$$

$$=\frac{1}{2^{27-20}}\cdot\frac{10^{21-11}}{5^7}=\frac{10^{10}}{2^7\cdot 5^7}=\frac{10^{10}}{(2\cdot 5)^7}=\frac{10^{10}}{10^7}=10^3=1000.$$

3653. Се формираат сите различни производи од по два множители од првите пет прости броеви $(2\cdot 3, 2\cdot 5, ...)$. Колку е квадратен корен од производот на квадратните корени на сите вакви производи?

Решение: Ќе ја решиме задачата поопшто – за произволни броеви a, b, c, d и e (со ист знак).

Сите производи со по два множители од дадените броеви се:

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce \text{ и } de \text{ – вкупно } 10.$$

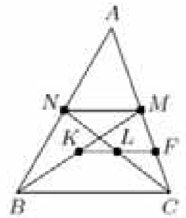
(Производите ab и ba се различни записи на еден производ и не ги броиме два пати, како различни, туку еднаш.)

За бараниот корен имаме:

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{ad}\sqrt{ae}\sqrt{bc}\sqrt{bd}\sqrt{be}\sqrt{cd}\sqrt{ce}\sqrt{de}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{(abcde)^4}} = \sqrt[4]{(abcde)^4} = abcde$$

Конкретно за $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=7$, $e=11$, бараниот корен е $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 2310.$



3654. Должината на една од страните во триаголникот ΔABC е $20\,cm$. Пресметај ја должината на отсечката што ги поврзува средините на тежишните линии повлечени кон другите две страни на триаголникот.

Решение: Нека $\overline{BC} = 20\,cm$, M е средина на страната AC, а N е средина на страната AB. Да ги означиме со K и L средините на тежишните линии BM и CN соодветно. Ако F е средина на MC, тогаш LF е средна линија во триаголникот ΔNCM, а KF е средна линија во триаголникот ΔBCM. Следува $LF \parallel MN \parallel BC \parallel KF$ што значи дека точките K, L и F лежат на иста права. Следува

$$\overline{KL} = \overline{KF} - \overline{LF} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{MN} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4}\cdot 20\,cm = 5\,cm.$$

3655. На располагање се 83 бели летви со должина од $6\,m$, 72 жолти летви од $7\,m$, 62 зелени летви од $8\,m$ и 58 црвени летви со должина од $9\,m$. Дали може со дадените летви да се огради квадратен терен, така што сите летви се искористени и секоја страна на квадратот–ограда содржи точно две бои? Преклопување на летвите при оградувањето не е дозволено.

Решение: Ако бараниот квадрат постои, тогаш има периметар $L = 83\cdot 6+72\cdot 7+62\cdot 8+58\cdot 9=498+504+496+522=2020\,\mathrm{m}$ и страната има должина $a=505\,\mathrm{m}$. Од равенствата:

$$83\cdot 6+1\cdot 7=505$$

$$62\cdot 8+1\cdot 9 = 505$$

$$67\cdot 7+4\cdot 9 = 505$$

$$53\cdot 9+4\cdot 7 = 505$$

е јасно дека бараното оградување на теренот е можно. Посочениот начин на комбинирање на летвите така што секоја страна е двобојна не е единствен. Ве охрабруваме да најдете ваш начин на оградување на теренот.

9 **одделение**

3656. Реши ја равенката

$$1-(2-(3-...(2018-(2019-(2020-x)))...)) =1010\,.$$

Решение. Може да се забележи дека пред секој непарен број има непарен број на загради и минуси (пред 3 има 2 загради и 2 минуса, пред 5 има 4 загради и 4 минуса, ..., пред 2019 има 2018 загради и 2018 минуса), а пред секој парен број има парен број на загради и минуси (пред 2 има една заграда и еден минус, пред 4 има 3 загради и 3 минуса, ..., пред 2020 има 2019 загради и 2019 минуса). Пред x има 2019 загради и 2020 минуса па знакот пред x е плус. Ако се ослободиме од заградите добиваме дека пред парните броеви е знакот минус, а пред непарните броеви е знакот плус. Така имаме $1-2+3-4+...-2018+2019-2020+x=1010$.

Групирајќи ги во парови добиваме

$\left(1-2\right)+\left(3-4\right)+...+\left(2017-2018\right)+\left(2019-2020\right)+x=1010$, односно

$\underbrace{-1-1-...-1-1}_{1010}+x=1010$. На тој начин добиваме дека $x=2020$.

3657. За доручек во едно семејство мајката приготвила лонче со кафе и лонче со млеко при што количествата течности во двете лончиња се различни. Целото млеко и кафе биле испиени кога секој член од семејството испил по една чаша од 250 милилитри, мешајќи кафе и млеко по свој вкус. Таткото испил $\frac{1}{4}$ од млекото и $\frac{1}{6}$ од кафето. Колку члена има семејството?

Решение.(Ивона Митиќ, 9 одд., ООУ „Невена Георгиевска – Дуњa“, Скопје)

3657. x ml кафе

y ml млеко

A - број на членови во семејството

$x+y=250\cdot A$ $\qquad$ A е цел број

$\frac{y}{4}+\frac{x}{6}=250\text{ml} \;/\cdot 12$

$3y+2x=3000$

$y+2y+2x=3000$

$y+2(y+x)=3000$

$y+2\cdot 250\cdot A=3000$

$y+500A=3000$

$y=3000-500A$

$y>0 \Rightarrow 3000-500A>0$

$3000>500A$

$\frac{300\cancel{0}}{50\cancel{0}}>A$

$6>A$

$x=250A-y$

$x=250A-(3000-500A)$

$x=250A-3000+500A$

$x=750A-3000$

$x>0 \Rightarrow 750A-3000>0$

$750A>3000$

$A>\frac{300\cancel{0}}{75\cancel{0}}$

$A>4$

$4<A<6 \Rightarrow A=5$ (бидејќи A е цел број)

Семејството има 5 члена

3658. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13\,cm$ и катета $5\,cm$ (види цртеж).

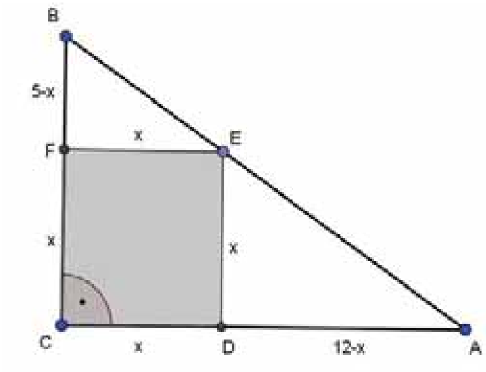
Решение: Без губење на општоста нека $\overline{BC}=5\,cm$. Од $\overline{AB}=13\,cm$ и $\overline{BC}=5\,cm$ со примена на Питагорова теорема имаме:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

$$13^2 = \overline{AC}^2 + 5^2,$$

$$\overline{AC}^2 = 144,$$

од каде се добива дека $\overline{AC} = 12\,cm$.



Нека $\overline{CF} = \overline{CD} = x$. Тогаш $\overline{BF} = 5 - x$ и $\overline{AD} = 12 - x$ (види цртеж). Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата $(12-x) : x = x : (5-x)$. На тој начин имаме: $(12-x)\cdot(5-x) = x^2$, од каде се добива дека $x = \frac{60}{17}$.

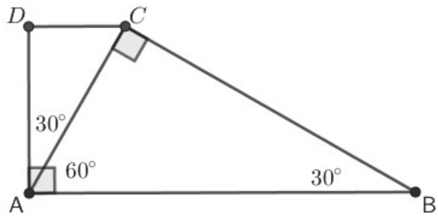
Од формулата за плоштина на квадрат добиваме дека:

$$P = x^2 = \frac{3600}{289}.$$

3659. Аглите при темињата A и B на трапезот $ABCD$ (притоа $AB \parallel CD$) се соодветно 90° и 30°. Аглите $\angle DAC$ и $\angle CAB$ се однесуваат како $1:2$. Докажи дека $\overline{AB} = 4 \cdot \overline{DC}$.

Решение: Од условот на задачата имаме дека

$$\angle DAC : \angle CAB = 1:2 \quad .....(1)$$



Нека $\angle DAC = x$, $0^\circ < x < 180^\circ$. Тогаш од (1) следува дека $\angle CAB = 2x$

Бидејќи $\angle DAC + \angle CAB = 90^\circ$, добиваме дека $x + 2x = 90^\circ$, т.е. $x = 30^\circ$. Тогаш $\angle CAB = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Од триаголникот ΔACB имаме дека

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Бидејќи $AB \parallel CD$ и $\angle BAD = 90^\circ$, следува дека $\angle ADC = 90^\circ$. Катетата DC е спроти агол од 30° во правоаголниот триаголник ΔADC, па важи $\overline{AC} = 2\cdot\overline{DC}$. Катетата AC е исто така спроти агол од 30° во правоаголниот триаголник ΔACB, па следува дека $\overline{AB} = 2\cdot\overline{AC} = 2\cdot 2\cdot\overline{DC} = 4\cdot\overline{DC}$, што требаше да се докаже.

УЧЕНИЦИ КОИ ИСПРАТИЈА ТОЧНИ РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLV-2

Задачи:	Ученик:	Одд.	Училиште:	Место:
3632,3633 3635	Снежана Волканоска	IV	Страшо Пинџур	Неготино
3636-3639 3640-3643	Кирил Атанасов	V	11 Октомври	Скопје
3636-3639 3640-3643	Група ученици	V	Никола Карев	Радовиш
3640-3643 3644-3647	Марија Муканова	VI	Александар Македонски	Скопје
3640-3643 3645-3647	Стефан Секулоски	VI	Гоце Делчев	Прилеп
3644	Огнен Мирчески	VI	Блаже Конески	Скопје
3640-3643 3644-3647	Илина Арсова	VI	Кочо Рацин	Куманово
3644-3647 3648-3651	Марија Цветановска	VII	Илинден	Крива Паланка
3644,3646 3650	Мишо Младеновски	VII	Илинден	Крива Паланка
3644-3645	Михаил Блажевски	VII	Ѓорѓи Сугарев	Прилеп
3644-3647 3648,3649	Александра Тилева	VII	Никола Вапцаров	Струмица
3648-3650	Филип Темелкоски	VIII	К. Гаврилоски	Прилеп
3648-3651	Михаела Смилевска	VIII	К. Пејчиновиќ	Скопје
3649-3651 3652-3653	Матеа Димитриева	VIII		
3648-3652 3654,3655 3657,3659	Илина Козарова	VIII	Гоце Делчев	Битола
3653-3655 3656-3659	Ивона Митиќ	IX	Невена Г. Дуња	Скопје
3652,3653 3656,3658 3659	Сандра Филиповска	IX	К. П. Мисирков	Радовиш
3652-3654 3656,3658 3659	Марија Атанасова	IX	11 Октомври	Скопје

Во Нумерус XLV-2 беше направен пропуст за кој се извинуваме и ја дополнуваме листата решавачи на конкурсни задачи од Нумерус XLV-1: точни решенија на сите задачи за 5-6 одд. и 6-7 одд. испрати и ученичката Марија Муканова, ученичка од 6 одд. во ООУ „Александар Македонски“, Аеродром, Скопје.

Трајче Ѓорѓијевски
Мирко Петрушевски

НАГРАДНИ ЗАДАЧИ
(решенија на задачите од претходниот број)

1. Дадена е шаховска 2019×2019 табла таква што секое од четирите единечни квадратчиња во аглите е црно. Од таблата се отстранети три единечни квадратчиња: две црни и едно бело. Покажете дека добиената „дефектна“ табла може да се паркетира со домина (2×1 правоаголничиња).

Решение. Ќе го покажеме следново посилно тврдење:

Ако од шаховска $(2m+1)\times(2n+1)$ табла $(m,n\in\mathbb{N})$ таква што секое од четирите единечни квадратчиња во аглите е црно се отстранат три единечни квадратчиња, две црни и едно бело, тогаш добиената „дефектна“ табла може да се паркетира со домина.

Случајот на 3×3 табла се проверува непосредно. Деталите ги оставаме на читателот (со сугестија да се земе предвид симетријата со цел да се оптимизира бројот на потслучаи.) Да го разгледаме случајот кога барем една од димензиите на $(2m+1)\times(2n+1)$ таблата T надминува 3, да речеме дека станува збор за ширината. Тогаш постојат две дисјунктни ленти со ширини 2 на спротивните краеви од T (гледано по должина). Ако барем една од овие две ленти не содржи ниту едно од отстранетите единечни квадратчиња, тогаш индуктивниот чекор се сведува на употреба на индуктивната хипотеза. Затоа, можеме дополнително да претпоставиме дека една од овие две ленти, да ја означиме со L, содржи точно едно од отстранетите единечни квадратчиња. Преостанатиот дел од таблата, да го означиме со $T-L$, содржи точно две од отстранетите единечни квадратчиња. Согласно индуктивната хипотеза, ако од $T-L$ дополнително се отстрани било кое единечно квадратче во боја на она квадратче отстрането од L, тогаш преостанатата „дефектна“ табла може да се паркетира со домина. Останува овој избор на единечно квадратче да се направи паметно. Деталите ги оставаме на читателот (со сугестија, во $T-L$ да се разгледува лентата со ширина 1 која е соседна на L.)

2. Дадени се 674 на изглед еднакви топчиња такви што никои две немаат иста маса. На располагање е дадена една споредбена вага (со два таса). Покажете дека со 2020 мерења (споредби) на вагата може да се идентификуваат најтешкото и најлесното топче.

Решение. Ќе го покажеме следново поопшто (и „двојно“ посилно) тврдење:

Од секои $2n$ наизглед еднакви топчиња такви што никои две немаат иста маса, со користење само на споредбена вага (со два таса), може да се идентификуваат најтешкото и најлесното топче со $3n-2$ мерења (споредби).

Да ги групираме топчињата во n парови од по две топчиња, и да ги споредиме топчињата од секој ваков пар. Тоа се n мерења со кои сме успеале да издвоиме група T од n топчиња меѓу кои се наоѓа најтешкото, и група L од n топчиња меѓу кои се наоѓа најлесното. Со дополнителни $n-1$ мерења во групата T можеме да откриеме кое е најтешкото топче во T, а со тоа и во целата група. Слично, со дополнителни $n-1$ мерења во групата L можеме да откриеме кое е најлесното топче во L, а со тоа и во целата група. Значи, $n+(n-1)+(n-1)=3n-2$ мерења се доволни за издвојување на најтешкото и најлесното топче.

Точно решение на оваа задача до редакцијата на „Нумерус“ испрати **Тодор Пљаков** (VII 5 одделение при ООУ „Блаже Конески“ од Велес).

Крајниот рок за доставување на решенијата на конкурсните и на наградните задачи е 31 март 2020 година.

Ве молиме, именувајте ги сликите од решенијата кои ги праќате со: броевите на задачите, Вашето име и презиме и одделение. На пример 3668-3671 Име Презиме 5 одд.

Во пораката на е-адресата numerus.smm@gmail.com наведете ги: Вашето име и презиме, одделение, училиште и град/место.

Трајче Ѓорѓијевски
Мирко Петрушевски

Математичка индукција
(решенија на задачите за самостојна работа од претходниот број)

1. Покажете дека за секој природен број n важат равенствата:

(а) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(б) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

Решение. Двете равенства се формули со облик:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ \sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n), \qquad (1.1)$$

каде f,F се одредени функции чиј домен се природните броеви. Индуктивниот доказ (при слаба индукција) на сумациона формула (1.1) се сведува на верификација на следниве две тврдења:

(i) $f(1)=F(1)$ и (ii) $F(n+1)-F(n)=f(n+1)$.

(а) Да забележиме дека тука $f(n)=n$ и $F(n)=\frac{n(n+1)}{2}$.Така

$f(1)=1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=F(1)$, што го потврдува (i); за (ii) имаме:

$$F(n+1)-F(n)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}\cdot(n+2-n)=n+1=f(n+1).$$

(б) Овојпат $f(n)=n^3$ и $F(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (согласно (а)). Така

$f(1)=1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}=F(1)$, што го потврдува (i); од друга страна, за (ii) имаме

$$F(n+1)-F(n)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2}{4}((n+2)^2-n^2)=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)=(n+1)^3=f(n+1).$$

2. Покажете дека за секој природен број n важи равенството:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

Решение. Да ги означиме левата и десната страна на равенството со $L(n)$ и $D(n)$. Тогаш $L(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=D(1)$. Индуктивниот чекор (при доказ со слаба индукција) се сведува на проверка на тоа дека

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ L(n+1)-L(n)=D(n+1)-D(n) \tag{2.1}$$

(Зошто?) Имаме,

$$\begin{aligned} L(n+1)-L(n)&=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} \\ D(n+1)-D(n)&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Значи, (2.1) е еквивалентно со очигледното равенството

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}. \tag{2.3}$$

3. Покажете дека за секој природен број n важи неравенството:

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3.$$

Решение. Да го докажеме посилново тврдење: *за секој природен број* n *важи неравенството*

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\le 3-\frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Навистина, за $n=1$ обете страни на (3.1) се еднакви на 2. Ова ја потврдува индуктивната база. За индуктивниот чекор доволно е да покажеме дека

$$\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\le 3-\frac{1}{n+1}. \tag{3.2}$$

Непосредно се проверува дека неравенството (3.2) се сведува на неравенството

$$\frac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}>0, \tag{3.3}$$

што е секако задоволено: имено, $n^2-n+2=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$.

4. Покажете дека за секој природен број n важи неравенството:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{5}{2}.$$

Решение. Да го докажеме следново посилно тврдење: *за секој природен број* $n \geq 2$ *важи неравенството*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right). \qquad (4.1)$$

Навистина, за $n = 2$ обете страни на неравенството (4.1) се еднакви на $\frac{15}{8}$. Ова ја потврдува индуктивната база. (Во конкретниов случај докажуваме вистинитост на низа искази $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$, ... со помош на методот на слаба индукција, па така индуктивната база се однесува на исказот $\mathcal{I}_2$.) За индуктивниот чекор доволно е да покажеме дека

$$\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right). \qquad (4.2)$$

Непосредно се проверува дека неравенството (4.2) е последица на очигледното неравенство $\frac{1}{2^{2n+1}} > 0$.

5. Покажете дека за секој природен број n важи неравенството:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{n}}}} < 3.$$

Прво решение. Да го докажеме посилново тврдење: *за секои природни броеви* k *и* n *такви што* $2 \leq k \leq n$, *важи неравенството*

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < k+1. \qquad (5.1)$$

Ќе го примениме методот на регресивна индукција, т.е., прво ќе ја докажеме индуктивната база $k = n$, а потоа индуктивниот чекор $k+1 \to k$. Индуктивната база гласи: $\sqrt{n} < n+1$, што е очигледно исполнето. За индуктивниот чекор, имајќи ја предвид индуктивната хипотеза

$$\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{(k+3)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < k+2, \qquad (5.2)$$

доволно е да докажеме дека

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < \sqrt{k(k+2)}. \qquad (5.3)$$

Преостанува да воочиме дека неравенството (5.3) е последица на очигледното неравенство $\sqrt{k(k+2)} < k+1$.

Второ решение. Да користиме дека за секој природен број m важи $m=\sqrt{m^2}=\sqrt{1+m^2-1}=\sqrt{1+(m-1)(m+1)}$. Оттука, редоследно земајќи $m=3,4,\dots,n$, имаме

$$3=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}}=\dots=$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\dots+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}}\ .$$

6. Од $2^n\times 2^n$ табла е отстрането едно единечно квадратче. Покажете дека преостаната „дефектна“ табла може да се паркетира со $\llcorner$-тримина.

Решение. Да изведеме доказ со помош на слаба индукција. Индуктивната база е очигледно задоволена: имено, кога од табла 2×2 ќе се отстрани едно единечно квадратче, преостаната „дефектна“ табла самата се состои од точно едно $\llcorner$-тримино. За индуктивниот чекор $n\to n+1$ најпрво да забележиме дека секоја „дефектна“ $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ табла се состои од четири $2^n\times 2^n$ табли: притоа, една „дефектна“ и три „регуларни“. Оваа обсервација нé води кон следнава идеја: започнуваме паркетирање на „дефектната“ $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ табла со тоа што првото $\llcorner$-тримино го поставуваме во централното 2×2 квадратче на начин таков што нема да го покриеме токму единечното квадратче што припаѓа на „дефектната“ $2^n\times 2^n$ табла; така, ни преостанува да паркетираме четири „дефектни“ $2^n\times 2^n$ табли (зошто?), па доволно е да ја искористиме индуктивната хипотеза.

7. Покажете дека збирот на сите внатрешни агли во произволен (незадолжително конвексен) n-аголник M изнесува

$$\sigma_n=(n-2)\cdot 180^0\ .$$

Решение. Согласно Пример 12, M може да се триангулира (разбие на триаголници) со повлекување на неколку дијагонали низ неговата внатрешност. Да го означиме со m бројот на триаголници од кои се состои една таква триангулација. Имајќи предвид дека збирот на внатрешните агли во секој триаголник е константа (изнесува 180^0) очигледно е дека бројот m не зависи од конкретната триангулација, т.е., станува збор за константа на многуаголникот M. Всушност, тврдењето на оваа задача се сведува на докажуваање на следново равенство:

$$m=n-2\ .$$

Да изведеме доказ на ова равенство со силна индукција. Веродостојноста на индуктивната база ($n=3$) е очигледна. За индуктвниот чекор, да разгледаме една конкретна триангулација на M, и нека со d е означена произволно избрана „внатрешна" дијагонала која е употребена при триангулацијата. Постои природен број k, $3 \le k \le n-1$, така што со повлекувањето на d, n-аголникот M се разбива на k-аголник и $(n-k+2)$-аголник. Согласно индуктивната претпоставка, секоја триангулација на произволен (незадолжително конвексен) n'-аголник ($3 \le n' < n$) се состои од точно $n'-2$ триаголника. Останува уште само да искористиме дека k и $(n-k+2)$ се помали од n.

8. Нека $a \in \mathbb{N}$ не е полн квадрат на природен број. Тогаш важи: $\sqrt{a}$ е ирационален број.

Решение. Тврдењето од задачата може да се искаже и на следниов начин: *не постојат природни броеви m и n за кои*

$$m^2 = an^2. \tag{8.1}$$

Нека $\mathcal{I}_n$ гласи: не постои $m \in \mathbb{N}$ таков што важи (8.1). Ќе ја докажеме вистинитоста на исказите $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$,..., $\mathcal{I}_n$,... со помош на методот на бесконечно опаѓање. Имено, нека n е најмалиот природен број за кој $\mathcal{I}_n$ е невистинит, т.е., за кој постои запис

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n} \ \left(m, n \in \mathbb{N}\right). \tag{8.2}$$

Бројот $\sqrt{a}$ се наоѓа меѓу два природни броеви, нека се тоа k и $k+1$, т.е., нека $k < \sqrt{a} < k+1$. Тогаш, согласно (8.2),

$$0 < m - kn < n. \tag{8.3}$$

Со други зборови, $m-kn$ е природен број помал од n. Но

$$\frac{an-km}{m-kn} = \frac{m}{n}. \tag{8.4}$$

Навистина,

$$\frac{an-km}{m-kn} = \frac{n(an-km)}{n(m-kn)} = \frac{an^2-kmn}{n(m-kn)} = \frac{m^2-mkn}{n(m-kn)} = \frac{m(m-kn)}{n(m-kn)} = \frac{m}{n}.$$

Значи $\sqrt{a} = \dfrac{an-km}{m-kn}$ и $an-km \in \mathbb{Z}$, па припаѓа и на $\mathbb{N}$.

Последново противречи на претпоставката дека n е најмалиот природен број за кој $\mathcal{I}_n$ е невистинит. Така, со помош на методот на бесконечно опаѓање, докажавме дека секој од исказите $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$,..., $\mathcal{I}_n$,... е вистинит, т.е., дека $\sqrt{a}$ е ирационален број.

Ирена Стојковска,
Природно-математички факултет, Скопје

ЕСЕНСКА МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА 2019

Во текот на месеците октомври и првата половина од месец ноември 2019 година, на Природно-математичкиот факултет во Скопје, се одржа Есенската математичка школа 2019 за учениците од IV до IX оддление од основните училишта и учениците од средните училишта. Школата беше наменета за сите ученици кои ја сакаат математиката и сакаат да ги откриваат убавините на математиката со продлабочување на постоечките знаења и стекнување нови знаења и вештини. На школата учествуваа 225 ученици, од кои 173 ученици од основните училишта.

Наставата се одвиваше во предпладневните часови во саботите. На Школата се обработува теми кои ја надополнуваат, но и излегуваат од рамките на редовната настава по математика во училиштата. Учениците од IV и V одделение ги изучуваа темите „Решавање текстуални задачи со метод на отсечки“ и „Алиса во земјата на математиката“, учениците од VI и VII одделение ги работеа темите „Геометриски конструкции“ и „Линеарни равенки и примена“, а учениците од VIII и IX одделние ги работеа темите „Полиноми“ и „Складност и сличност“. По завршување на предавањата, учениците имаа завршен тест за проверка на стекнатите знаења на школата, според кој добија дипломи за постигнатиот успех.

Општиот впечаток за органицазијата и за наставата е позитивен, што претставува доволна причина ова искуство да го повториме и оваа година. Повеќе информации за одржаната Есенска математичка школа 2019, може да најдете на интернет страницата https://smm.org.mk/.

Ирена Стојковска,
Природно-математички факултет, Скопје

НОЕМВРИ – МЕСЕЦ НА НАУКАТА 2019

Во текот на месец ноември 2019 година, на Природно-математичкиот факултет во Скопје се одржа манифестацијата за популаризација на природните науки и математиката „Ноември - Месец на науката“ 2019 во организација на македонските друштва за природни науки. Овој настан беше наменет за учениците од основните и средните училишта, наставниците, но и за поширокaта јавност. Реализацијата на настанот беше во три дена, 16, 23 и 30 ноември 2019 год. за ученици од I-VI одд., VII-IX одд. и I-IV год. соодветно. Преку организирани предавања, натпревари во експерименти, изработки и проекти, работилници и посети на лабаратории, сите кои присуствуваа на оваа манифестација придонесоа за популаризација на природните науки и математиката.

Од областа на математиката за учениците од основните училишта беа одржани предавањата: „Научни методи во наставата по математика“ и „Броеви на Фибоначи“, а во првиот ден се реализираше работилницата насловена „Математиката е повеќе од бројки: 3Д Сома сложувалка“. Во секој од трите викенда се одржаа натпревари за ученици во презентација на проекти по математика. Беа презентирани вкупно 43 проекти од математика. Презентираните проекти оставија голем впечаток на комисиите, кои забележаа дека учениците и нивните ментори максимално се вложиле во изработките и презентациите. Најуспешните добија и награди.

Во првиот викенд со I награда наградени се проектите на Горјан Николовски IV одд. и Никола Стојковски V одд., со II награда награден е проектот на Јована Малинова V одд., а со III награда проектите на Стефан Камчев V одд., Екатерина Хаџиска VI одд. и Лилјана Лазова VI одд. Во вториот викенд со I награда награден е проектот на Илија Иванов VII одд., со II награда награден е на Мелани Пешова VIII одд., а со III награда проектите на Дамјан Зимбаков IX одд. и Христина Ванчова IX одд.

На наградените им честитаме за наградите, а на сите ученици им посакуваме континуирано, квалитетно и забавно понатамошно другарување со убавините на математиката!

Прилогот во продолжение е еден од наградените проекти на манифестацијата „Ноември – Месецот на науката“ 2019 со трета награда во категоријата VII-IX одделение.

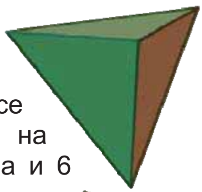
Дамјан Зимбаков, IX одд.
ООУ „Гоце Делчев“, Босилово.

ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ – ЗОШТО ПЕТ?

Полиедар (или *рабесто тело*) е фигура ограничена со површини коишто се составени само од многуаголници. Многуаголниците што ја образуваат површината (т.е. „границата“) на полиедарот се викаат *ѕидови*, нивните страни се викаат *рабови*, а нивните темиња се *темиња* на полиедарот. Во секое теме на еден полиедар се сретнуваат барем три негови рабови, а секој раб е страна на два и само на два негови ѕидови. *Конвексен полиедар* е полиедар којшто се наоѓа на иста страна од рамнината на кој било негов ѕид. За еден конвексен полиедар велиме дека е *правилен* ако сите негови ѕидови се правилни многуаголници. Постојат само пет правилни полиедри уште познати како Платонови тела. Кои се правилните полиедри и зошто ги има само пет?

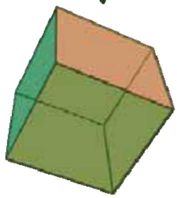
Петте правилни полиедри се:

- **Правилен тетраедар**



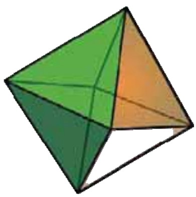
Правилниот тетраедар е полиедар составен од четири рамнострани триаголници, од кои три се среќаваат во секое теме. Тетраедарот е вид на пирамида. Тетраедарот има: 4 ѕидови, 4 темиња и 6 рабови.

- **Правилен хексаедар (Коцка)**



Хексаедар е секое тело составено од шест ѕидови. Правилен хексаедар (коцка) е полиедар составен од шест квадрати, од кои три се среќаваат во секое теме. Хексаедарот има: 6 ѕидови, 8 темиња и 12 рабови.

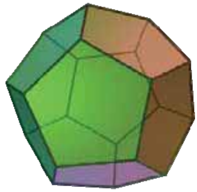
- **Правилен октаедар**



Правилниот октаедар е полиедар составен од осум рамнострани триаголници, од кои четири се среќаваат во секое теме. Октаедарот има 8 ѕидови, 6 темиња и 12 рабови.

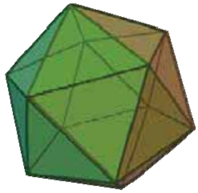
- **Правилен додекаедар**

Додекаедар е тело составено од дванаесет ѕидови. Правилниот додекаедар е составен од дванаесет правилни петаголници, од кои три се среќаваат во секое теме. Додекаедарот има 12 ѕидови, 20 темиња и 30 рабови.



- **Правилен икосаедар**

Правилниот икосаедар е составен од дваесет рамнострани триаголници, од кои пет се среќаваат во секое теме. Икосаедарот е правилен полиедар со најголем број ѕидови. Икосаедарот има: 12 ѕидови, 12 темиња и 30 рабови.



Доказ дека постојат само пет правилни полиедри

Постојат повеќе докази за докажување дека постојат само пет правилни полиедри. Еден од нив е со помош на големината на аглите кои се среќаваат во секое теме. Наједноставната причина зошто има само пет правилни полиедри е следнава:

Во секое теме мора да се среќаваат најмалку 3 ѕидови (или повеќе). Кога ќе ги собереме аглите на тие ѕидови резултатот треба да биде помал од 360°. Бидејќи, ако резултатот е еднаков на 360° тогаш фигуратата е рамнина. Ѕидовите на правилен полиедар се идентични правилни многуаголници, па добиваме:

- Правилен триаголник има агол од 60°, следува:
  3 Триаголници (3 × 60° = 180°) – тетраедар
  4 Триаголници (4 × 60° = 240°) – октаедар
  5 Триаголници (5 × 60° = 300°) – икосаедар
  6 Триаголници (6 × 60° = 360°) – рамнина
- Правилен квадрат има агли од 90°, следува:
  3 Квадрати (3 × 90° = 270°) – хексаедар т.е. коцка
  4 Квадрати (4 × 90° = 360°) – рамнина
- Правилен петаголник има агли од 108°, следува:
  3 Петаголници (3 × 108° = 324°) – додекаедар
  4 Петаголници (4 × 108° = 432°) – преголеми агли
- Правилен шестаголник има агли од 120°, но 3 × 120° = 360° т.е. добиваме рамнина.

Ако продолжиме понатаму ќе имаме фигури со седум, осум, девет ѕидови од кои не може да се формира правилен полиедар, бидејќи аглите се преголеми.

Формулата на Ојлер
За секој правилен полиедар важи: Резултатот од бројот на ѕидови плус бројот на темиња минус бројот на рабови секогаш е еднаков на 2. Односно **Ојлеровата теорема** гласи:

$$F + V - E = 2$$

F = број на ѕидови
V = број на темиња
E = број на рабови

Да ја провериме нејзината точност за правилните полиедри.
Тетраедар: 4 + 4 – 6 = 8 – 6 = 2
Хексаедар: 6 + 8 – 12 = 14 – 12 = 2
Октаедар: 8 + 6 – 12 = 14 – 12 = 2
Додекаедар: 12 + 20 – 30 = 32 – 30 = 2
Икосаедар: 20 +12 – 30 = 32 -30 = 2

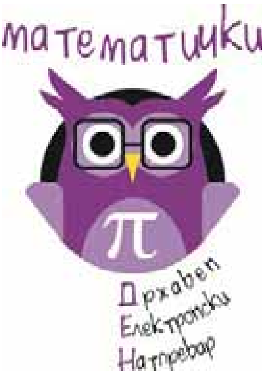
Друг начин да се покаже дека има точно пет правилни полиедри е со помош Ојлеровата теорема. Доказот може да се најде во [2].

Извори:
[1] Numberphile, 5 Platonic Solids, https://www.youtube.com/watch?v=gVzu1_12FUc
[2] Math is Fun, Platonic Solids - Why Five?, https://www.mathsisfun.com/geometry/platonic-solids-why-five.html
[3] Н. Целакоски, В. Бакева, Б. Миладиновиќ, Ј. Стефановски, Математика за втора година средно стручно образование за сите струки, МОН на РМ, 2010.

Забелешка: Овој текст е првично објавен на Порталот на Институтот за математика ПОИМ, http://poim-pmf.weebly.com/.

ЕЛЕКТРОНСКИ НАТПРЕВАР „ПИ ДЕН“ 2020
ВО ЧЕСТ НА МЕЃУНАРОДНИОТ ДЕН НА МАТЕМАТИКАТА

Драги ученици, наставници и родители, ве известуваме дека Сојузот на математичари на Македонија се вклучи во одбележувањето на Меѓународниот ден на математиката, кој за прв пат ќе се прослави на 14 март 2020 година, со одлука на Обединетите нации. Овој ден е избран заради врската која постои помеѓу датумот 14.03 и првите цифри на бројот π (пи). Мото на прославата е „Математиката е насекаде“ и организаторите, Меѓу-народната унија на математичарите, нудат поддршка за сите кои сакаат да се приклучат на настанот преку идеи, постери, проекти (idm314.org).



За таа цел, Сојузот на математичари на Македонија организира државен електронски натпревар „ПИ-ДЕН“ кој е отворен за сите ученици од прво одделение до четврта година, сите студенти и љубители на математиката, воопшто. На **14 и 15 март 2020 година**, денот зависи од возрасната катего-рија, ќе треба да обезбедите компјутер, мобилен телефон, таблет или кој било друг електронски уред, пристап до интернет и во определеното време да пристапите до задачите. Бројот на задачи зависи од категоријата, а времето за решавање е 90 минути, по што системот се затвора. Сè што ви треба за да учествувате е да се пријавите до **10 март 2020 година** на линкот кој може да го најдете на официјалната интернет страница на СММ, каде ќе оставите податоци и електронска пошта преку која, на денот на натпреварот, ќе добиете пристап до задачите кои ги предвидовме и составивме за оваа цел. Секој учесник на натпреварот ќе добие сертификат за учество и потврда за постигнатиот успех. Повеќе информации за пријавувањето и термините за пристап кон задачите може да најдете на страницата на натпреварот:

https://smm.org.mk/natprevari/pi-den/.

Имаме неверојатна шанса да бидеме дел од манифестација која за прв пат се случува и означува нов почеток за меѓународната поддршка на математиката, а од друга страна можеме заеднички во рамките на семејството да покажеме дека чесноста како една од клучните одлики на секој интелектуалец не е маска која се носи повремено и по потреба, туку постои и кога никој не ги следи будно нашите постапки. Ова е и одлична можност да ја промовираме инклузивноста и надвор од училишните клупи.

Во пресрет на овој историски ден, ве повикуваме да бидете дел од натпреварот.

Ваш СММ!

ОДГОВОРИ

Одговори на задачите за самостојна работа од
ТАЈНАТА НА БРОЈОТ 6174

1. Бројот 495 е единствен трицифрен Капрекаров број.
2. Не постои двоцифрен Капрекаров број. Со примена на постапката опишана во прилогот, двоцифрените броеви секогаш завршуваат во циклус 09 → 81 → 63 → 27 → 45 → 09.

Одговор на задачите за самостојна работа од
РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1.				**2.**				**3.**	
а)	$x = 34$	д)	$x = 20$	а)	$x = 5$	д)	$x = 7$	а)	$x = 14$
б)	$x = 81$	ѓ)	$x = 6$	б)	$x = 15$	ѓ)	$x = 20$	б)	$x = 6$
в)	$x = 41$	е)	$x = 459$	в)	$x = 117$	е)	$x = 2$	в)	$x = 3$
г)	$x = 24$	ж)	$x = 7$	г)	$x = 25$	ж)	$x = 0$		

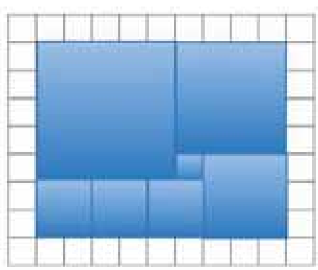
Одговор на **МАТЕМАТИЧКАТА ЗАГАТКА 1**

Олга може да стои само покрај Павел, па мора да е или прва или последна во редот, а соодветно Павел да е втор или претпоследен. Бидејќи Димитар е пред Павел, Павел не може да е втор, односно мора да е претпоследен, а Олга да е последна. Марија мора да биде во редот пред Димитар, а Марина да не е до Марија, значи мора да биде: Марија - прва, Димитар – втор, а Марина – трета во редот, потоа Павел и на крајот Олга.

Одговор на **МАТЕМАТИЧКАТА ЗАГАТКА 2**

Збирот од плоштините на сите квадрати е

$$5^2 + 4^2 + 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 1^1 = 63$$



квадратни единици, што претставува плоштина и на правоаголникот. Страните на правоаголникот се цели броеви поголеми или еднакви на 5 единици (страната на најголемиот квадрат), па тие мора да се 7 и 9 единици, што значи дека пократката страна има должина од 7 единици. На сликата е прикажан еден таков распоред на квадратите.

Одговор на **МАТЕМАТИЧКАТА ЗАГАТКА 3**

Во секој од следните три распореди разликата меѓу збирот на два од броевите и третиот број во секој ред, секоја колона и двете дијагонали е еднаква на 5. На пример, кај првиот квадрат, за редиците важи (2 + 4) – 1 = 5, (3 + 7) – 5 = 5, (6 + 8) – 9 = 5, за колоните важи (2 + 6) – 3 = 5, (1 + 9) – 5 = 5, (4 + 8) – 7 = 5, а за дијагоналите важи (2 + 8) – 5 = 5 и (4 + 6) – 5 = 5. Дали постојат други такви распореди во кои разликата ќе биде еднаква на 5? Дали постојат распореди во кои разликата ќе биде еднаква на некој друг број различен од 5?

2	1	4
3	5	7
6	9	8

8	1	4
3	5	7
6	9	2

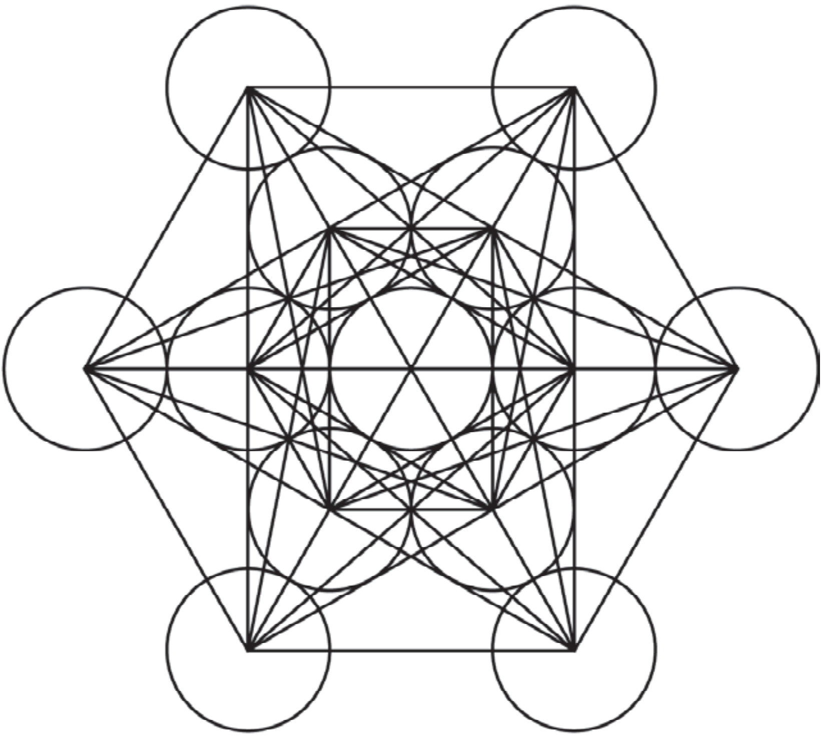
2	1	6
3	5	7
4	9	8

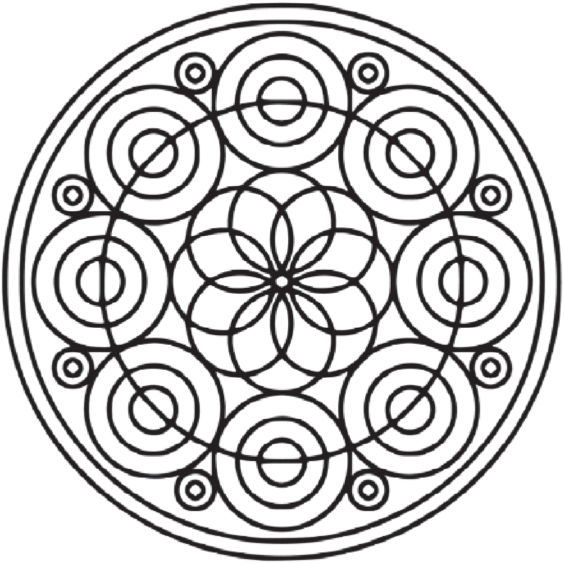
Одговори на задачите за самостојна работа од **МЕТОД НА ОТСЕЧКИ**

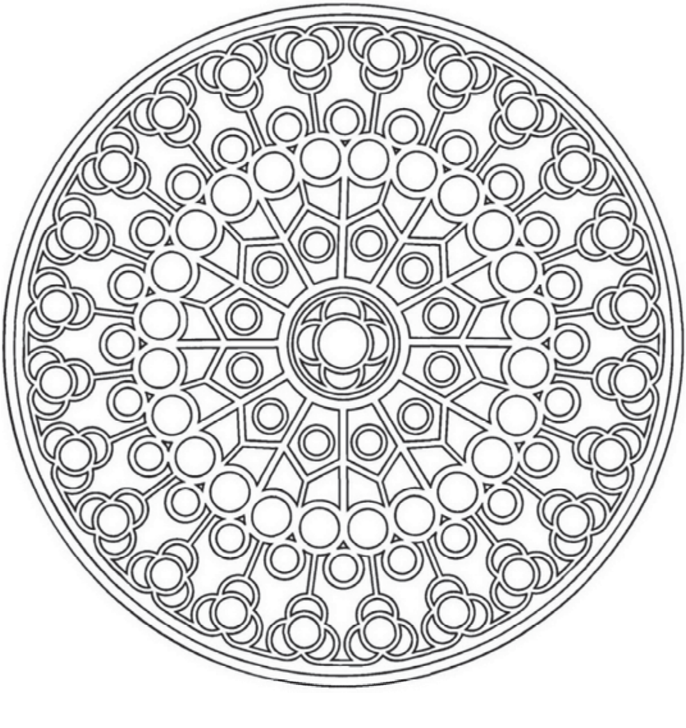
1. Марко потрошил 570 ден. Помош: Нацртај цртеж со единична отсечка парите кои ги потрошил Филип.
2. Дедо Мите собрал 30 јаболка повеќе од сливи. Помош: Нацртај цртеж со единична отсечка бројот на собрани круши.
3. Мартин има 58, Лука има 24, Александар има 116 и Коста има 16 џамлии. Помош: Нацртај цртеж со единична отсечка бројот на џамлии на Лука.
4. После 7 години Митко ќе има 43 години. Помош: Најцртај цртеж со единична отсечка сегашните години на Стево.
5. Јас имам 40 години, а сестра ми има 30 години. Помош: Нацртај цртежи за три временски моменти, сега, тогаш кога сестра ми била два пати помала од мене и после 15 години од сега. За единична отсечка може да ги земеш годините на сестра ми кога била два пати помала од мене.

КРЕАТИВНА РАБОТИЛНИЦА

Драги ученици, во чест на Меѓународниот ден на математика 14 март, ве повикуваме на една мала креативна работилница.
Во чест на ПИ-ДЕН-от, избравме неколку геометриски цртежи во кои доминираат кружници.
Вам ви преостанува да изберете прибор за цртање и боички.
Дополнителни идеи за цртежи може да најдете овде
https://www.art-is-fun.com/how-to-draw-a-mandala
Најважно од се бидете креативни!
Вашите креации испратете ги на адресата на списанието Нумерус, а најдобрите од нив ќе ги објавиме на web страната на СММ.







СОДРЖИНА


СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ
НА МАКЕДОНИЈА
МЕЃУНАРОДЕН ДЕН НА
МАТЕМАТИКАТА
14 МАРТ
МАТЕМАТИКАТА
Е НАСЕКАДЕ
математички
π
Државен
Електронски
Натпревар
www.smm.org.mk